【P409】球面3角法の極限

● 球面3角法の極限

球面3角法の極限としての平面3角法の再導出を試みましょう。また、平面3角法の諸公式間の関係についても、当主題で論じてしまうことにしましょう。

限りなく小さいために、3重的な(ただ1点のみの)病的な球面3角形に見える球面3角形を、限りなく拡大することが出来るとすれば、平面3角形に見えるでしょう。

このことは、球面3角法の各公式は、それらに登場する辺の長さa,b,cを無限小量と見做すならば、平面3角法のいずれかの公式に一致するということです。また、そうでないとすれば、平面3角法の公式に脱け(Lack)がある(僕はそうは思いませんが)ということを意味します。また、球面3角法のどの公式からも移行しない、平面3角法の公式が存在するならば、球面3角法の公式に脱けがある(そうとも思いませんが)ということを意味します。僕は、僕の呈示した平面3角法,球面3角法のどちらも完備だ(Complete)と思っています。つまり、どちらにも脱はない筈です。

球面3角法の公式の個数は6,平面3角法の公式の個数は5です。どちらも完備だとするならば、少なくとも、球面3角法の2つの公式が平面3角法の同じ1つの公式に移行することになります。どれとどれがどれに移行するのでしょうか? 興味深い(Interesting)とは思いませんか? 同じ1つの公式に移行する2つの公式は、互いに同値関係にある可能性があります。

『平面3角法』のところで(P322で)、(平余1)と(平余2)が同値であることを証明しましたね。このことは、(平余1)に移行する球面3角法の公式と、(平余2)に移行する球面3角法の公式が同値である可能性があります。

平面3角法の諸公式の取扱いは、球面3角法の諸公式の取

扱いより容易です。平面3角法の諸公式間の必要,十分関係を求めれば、極限操作(Limiting Operation)によって得られる、球面3角法の諸公式と平面3角法の諸公式間の移行関係と突き合わせる(Collate)ことによって、球面3角法の諸公式間の必要,十分関係に関する重要な知見(Hint)が得られます。勿論それだけではありません。当主題の主たる目的は、平面3角法と球面3角法の完備性を確認することです。

辺の長さ $a, b, c$ を無限小量と見做すということは、例えば $a$ についていえば

$$\sin a \longrightarrow a \quad , \quad \cos a \longrightarrow 1-\frac{1}{2}a^2 \qquad (\mathrm{W1})$$

とすることです。球面3角法の各公式にこの極限操作を施し、更に、$a, b, c$ に関して最低次の項だけを残します。

- (球正1)

$$\sin a \sin B = \sin b \sin A$$

$$\longrightarrow a \sin B = b \sin A \qquad (平正1)$$

- (球正2)

$$\sin A \sin B - \sin a \sin b = \cos A \cos B \cos c + \cos a \cos b \cos C$$

$$\longrightarrow \sin A \sin B - ab = \left(1-\frac{1}{2}c^2\right)\cos A \cos B + \left(1-\frac{1}{2}a^2\right)\left(1-\frac{1}{2}b^2\right)\cos C$$

$$\longrightarrow \sin A \sin B = \cos A \cos B + \cos C \qquad (平余3)$$

(次ページへ続く)

## 【P411】球面3角法の極限（続き）

- （球余1）

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$\longrightarrow \quad 1-\frac{1}{2}a^2 = (1-\frac{1}{2}b^2)(1-\frac{1}{2}c^2) + bc\cos A$$

$$\longrightarrow \quad -\frac{1}{2}a^2 = -\frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}c^2 + bc\cos A \qquad \text{（平余2）}$$

- （球余2）

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$

$$\longrightarrow \quad \cos A = -\cos B \cos C + (1-\frac{1}{2}a^2)\sin B \sin C$$

$$\longrightarrow \quad \cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \qquad \text{（平余3）}$$

- （球正余1）

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$$

$$\longrightarrow \quad a\cos B = (1-\frac{1}{2}b^2)c - b(1-\frac{1}{2}c^2)\cos A$$

$$\longrightarrow \quad a\cos B = c - b\cos A \qquad \text{（平余1）}$$

- （球正余2）

$$\sin A \cos b = \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a$$

$$\longrightarrow \quad (1-\frac{1}{2}b^2)\sin A = \cos B \sin C + (1-\frac{1}{2}a^2)\sin B \cos C$$

$$\longrightarrow \quad \sin A = \cos B \sin C + \sin B \cos C \qquad \text{（平正2）}$$

以上の様に、平面3角法の全ての公式が導出されました。$a, b, c$ に関して2次の項まで残ったのは（平余2）だけです。（平余2）は2次の微小量の項だけから成る式だからです。他の公式は全て、$\cos a = 1$ の近似で十分です。

上記の移行関係をグラフにまとめておきましょう。

【P412】球面3角法の極限（続き）

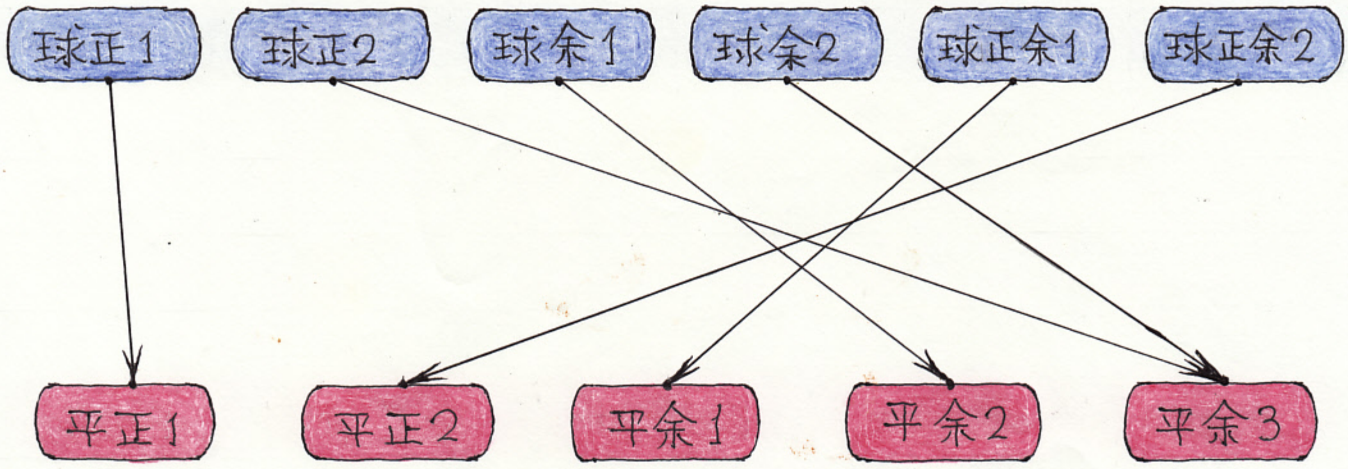



fig.206

平面3角法の諸公式間の必要，十分関係を、手当たり次第（at Random）に思い付くままに論じましょう。

（平余1）と（平余2）が同値であることは証明済です。（P322）。

平余1 ⟷ 平余2　　関係①

復習も兼ねて、証明を再記しておきましょう。

$$(\Rightarrow)\quad a^2+b^2 = aa+bb$$
$$= a(b\cos C + c\cos B) + (c\cos A + a\cos C)b$$
$$= c(a\cos B + b\cos A) + 2ab\cos C$$
$$= c^2 + 2ab\cos C \quad /\!/$$

$$(\Leftarrow)\quad b\cos C + c\cos B = b\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} + c\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$
$$= \frac{1}{2a}(a^2+b^2-c^2+c^2+a^2-b^2)$$
$$= \frac{1}{2a}2a^2$$
$$= a \quad /\!/$$

$abc \neq 0$ を仮定しましたが問題ありません。

【P413】球面3角法の極限（続き）

平余1 → 平正1 関係②

$$
\begin{aligned}
a^2-b^2 &= a(b\cos C + c\cos B) - b(c\cos A + a\cos C)\\
&= c(a\cos B - b\cos A)\\
&= (a\cos B + b\cos A)(a\cos B - b\cos A)\\
&= a^2\cos^2 B - b^2\cos^2 A
\end{aligned}
$$

$$a^2(1-\cos^2 B) = b^2(1-\cos^2 A)$$

$$a^2\sin^2 B = b^2\sin^2 A$$

$$a\sin B = b\sin A \quad //$$

（平余1）⟺（平余2）だから、（平余2）から、（平余1）を経由する（Go by Way of, Via）こと無く、直接（平正1）を導出できるはずです。やってみよう。ちょっと長くなります。（平余1）を使わないように気を付けよう。

平余2 → 平正1 関係③

$$a^2-b^2 = (b^2+c^2-2bc\cos A) - (c^2+a^2-2ac\cos B)$$

$$a^2-b^2 = c(a\cos B - b\cos A) \qquad (W2)$$

$$
\begin{aligned}
a^3\cos B - b^3\cos A &= a(b^2+c^2-2bc\cos A)\cos B\\
&\quad -b(c^2+a^2-2ca\cos B)\cos A\\
&= ab^2\cos B + ac^2\cos B - bc^2\cos A - ba^2\cos A
\end{aligned}
$$

$$a(a^2-b^2)\cos B - b(b^2-a^2)\cos A = c^2(a\cos B - b\cos A)$$

$$(a^2-b^2)(a\cos B + b\cos A) = c^2(a\cos B - b\cos A) \qquad (W3)$$

$(W2)^2 - (W3)\cdot(a\cos B - b\cos A)$ を作ります。

$$
\begin{aligned}
&(a^2-b^2)^2 - (a^2-b^2)(a\cos B + b\cos A)(a\cos B - b\cos A)\\
&= c^2(a\cos B - b\cos A)^2 - c^2(a\cos B - b\cos A)^2\\
&= 0
\end{aligned}
$$

【P414】6月26(土) 球面3角法の極限(続き)

$$(a^2-b^2)(a^2-b^2-a^2\cos^2 B+b^2\cos^2 A)=0$$
$$a^2(1-\cos^2 B)-b^2(1-\cos^2 A)=0$$
$$a^2\sin^2 B=b^2\sin^2 A$$
$$a\sin B=b\sin A \quad //$$

平正2 → 平余3　　関係④

$$\sin A\sin B=(\sin B\cos C+\cos B\sin C)(\sin C\cos A+\cos C\sin A)$$
$$=\sin B\cos C\sin C\cos A+\sin B\cos^2 C\sin A$$
$$+\cos B\sin^2 C\cos A+\cos B\sin C\cos C\sin A$$
$$=\cos A\cos B\sin^2 C+\sin A\sin B\cos^2 C$$
$$+(\sin A\cos B+\cos A\sin B)\sin C\cos C$$
$$=\cos A\cos B\sin^2 C+\sin A\sin B\cos^2 C$$
$$+\sin^2 C\cos C$$
$$\sin A\sin B(1-\cos^2 C)=(\cos A\cos B+\cos C)\sin^2 C$$
$$\sin A\sin B\sin^2 C=(\cos A\cos B+\cos C)\sin^2 C$$
$$\sin A\sin B=\cos A\cos B+\cos C \quad //$$

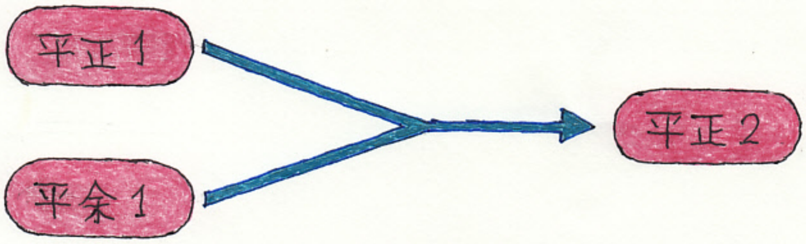
平余3 → 平正2　　関係⑤

$$\cos A\cos B=(-\cos B\cos C+\sin B\sin C)(-\cos C\cos A+\sin C\sin A)$$
$$=\cos B\cos^2 C\cos A-\cos B\cos C\sin C\sin A$$
$$-\sin B\sin C\cos C\cos A+\sin B\sin^2 C\sin A$$
$$\cos A\cos B(1-\cos^2 C)=\sin A\sin B\sin^2 C$$
$$-(\sin A\cos B+\cos A\sin B)\sin C\cos C$$
$$(\cos A\cos B-\sin A\sin B)\sin^2 C$$
$$=-(\sin A\cos B+\cos A\sin B)\sin C\cos C$$

# 【P415】6月27日（日）球面3角法の極限（続き）

$$-\cos C \sin^2 C = -(\sin A \cos B + \cos A \sin B)\sin C \cos C$$

$$\sin C = \sin A \cos B + \cos A \sin B \quad 〃$$




関係⑥

（平正1）より

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \quad (\equiv g) \qquad \text{(W4)}$$

ここで、$g$を定義しました。$g$は長さの逆数の次元を持ちます。この$g$は他の命題の証明でも用いられるでしょう。

$$\sin A = ga, \quad \sin B = gb, \quad \sin C = gc \qquad \text{(W5)}$$

（W4），（W5）は、（平正1）の別表現に外なりません。但し、$abc \neq 0$ を仮定しているので、十分に注意する（Pay Attention to）必要があります。このような例外処理は省略します。

（平余1）より

$$a = b \cos C + c \cos B$$

両辺に$g$を掛けて

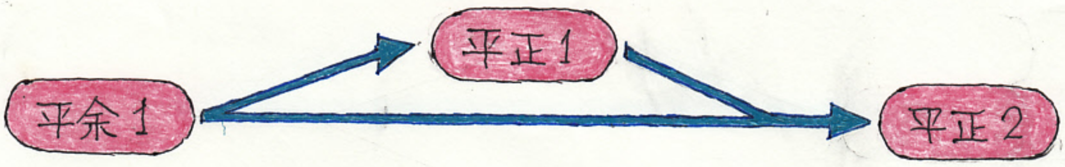
$$ga = gb \cos C + gc \cos B$$

（W5）の $ga$, $gb$, $gc$ を代入して

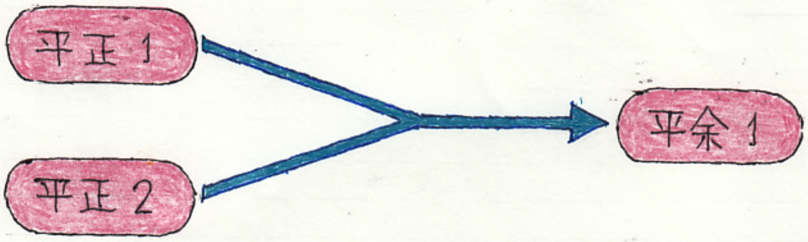
$$\sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B \quad 〃$$

【P416】球面3角法の極限（続き）


関係⑦




関係②,⑥より自明です。




関係⑧

（平正2）より

$$\sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B$$

（平正1）より（W5）が使えます。（W5）の $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ を代入して

$$qa = qb \cos C + qc \cos B$$

$$a = b \cos C + c \cos B \quad //$$

これら以外の関係は、今のところ思い付きません。関係①,…,⑧をまとめて絵にしておきましょう。

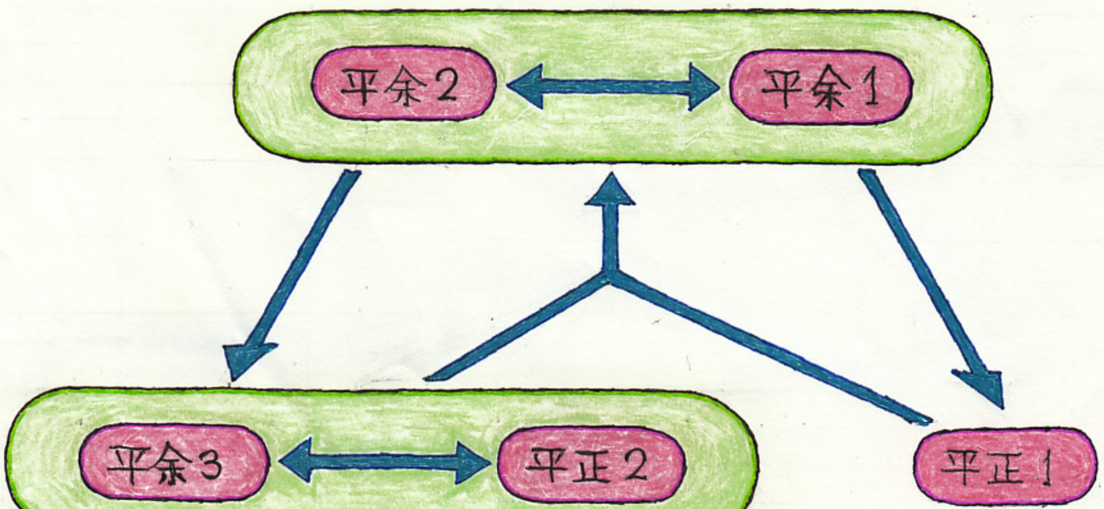



fig.207

● 小休止 : Periodic Tiling

by Myself

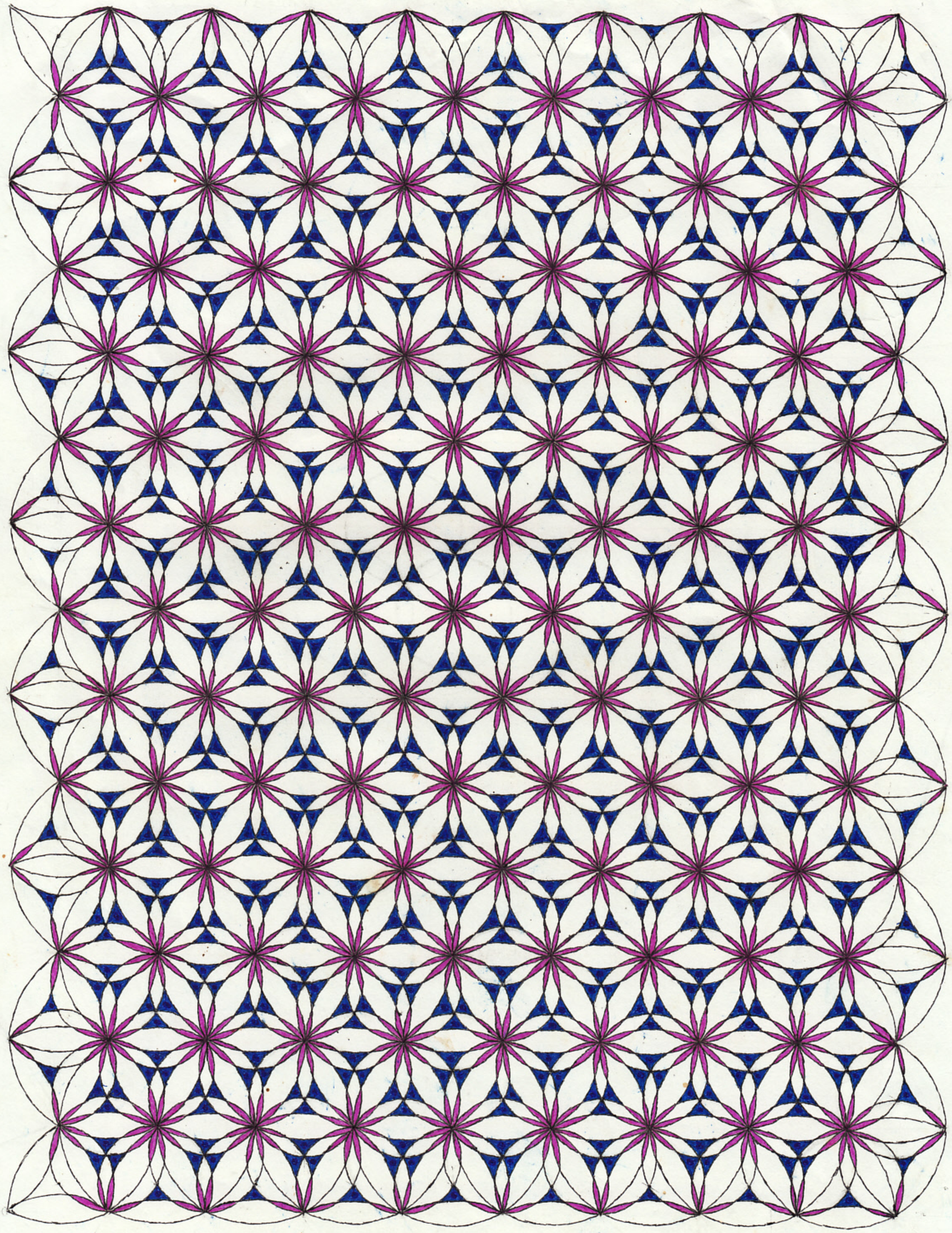


fig. 208