【P399】2021年6月18日(金) 球面3角法

● 球面3角法

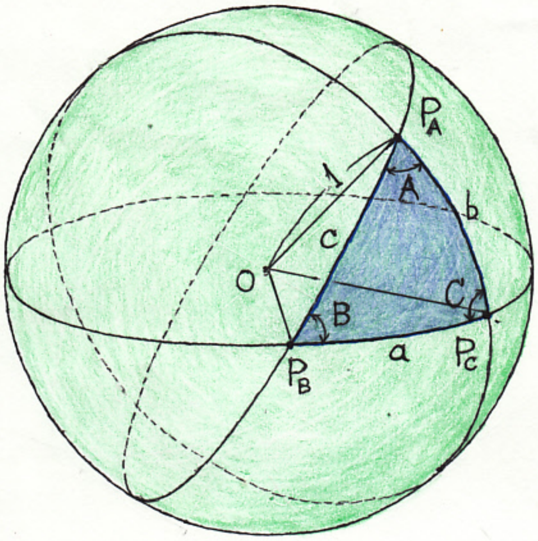


fig.200

球面3角法

fig.200の球面3角形$P_AP_BP_C$の内角A,B,C、辺の長さa,b,cは、以下の諸等式を満たします。

● 球面才1正弦公式(球正1)

- $\sin a \sin B = \sin b \sin A$
- $\sin b \sin C = \sin c \sin B$
- $\sin c \sin A = \sin a \sin C$ .1)

● 球面才2正弦公式(球正2)

- $\sin A \sin B - \sin a \sin b = \cos A \cos B \cos c + \cos a \cos b \cos C$
- $\sin B \sin C - \sin b \sin c = \cos B \cos C \cos a + \cos b \cos c \cos A$
- $\sin C \sin A - \sin c \sin a = \cos C \cos A \cos b + \cos c \cos a \cos B$ .2)

● 球面才1余弦公式(球余1)

- $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$
- $\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B$
- $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$ .3)

- **球面才2余弦公式(球余2)**
  - $\cos A = -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos a$
  - $\cos B = -\cos C\cos A + \sin C\sin A\cos b$
  - $\cos C = -\cos A\cos B + \sin A\sin B\cos c$ .4)
- **球面才1正弦余弦公式(球正余1)**
  - $\sin a\cos B = \cos b\sin c - \sin b\cos c\cos A$
  - $\sin b\cos C = \cos c\sin a - \sin c\cos a\cos B$
  - $\sin c\cos A = \cos a\sin b - \sin a\cos b\cos C$
  - $\sin a\cos C = \cos c\sin b - \sin c\cos b\cos A$
  - $\sin b\cos A = \cos a\sin c - \sin a\cos c\cos B$
  - $\sin c\cos B = \cos b\sin a - \sin b\cos a\cos C$ .5)
- **球面才2正弦余弦公式(球正余2)**
  - $\sin A\cos b = \cos B\sin C + \sin B\cos C\cos a$
  - $\sin B\cos c = \cos C\sin A + \sin C\cos A\cos b$
  - $\sin C\cos a = \cos A\sin B + \sin A\cos B\cos c$
  - $\sin A\cos c = \cos C\sin B + \sin C\cos B\cos a$
  - $\sin B\cos a = \cos A\sin C + \sin A\cos C\cos b$
  - $\sin C\cos b = \cos B\sin A + \sin B\cos A\cos c$ .6)

定理(132)

覚え(Memorise)切れない程の等式群ですね。僕自身暗記している訳ではありません。平面3角法ですら、全てを直ぐに思出せる自信はありません。

『平面3角法』のところで述べたのと同様の注釈(Comment)をします。大文字Cと小文字cの両方が登場しているので混乱しない様にして下さい。"球面才1正弦公式"等の名称は僕の造語です。一般に流布している訳ではありません。"球正1"等は"球面才1正弦公式"等の略称です。

【P401】 球面3角法（続き）

球面3角法を2次元球面単体法とも呼ぶことにします。n次元平面単体法と同様に、$n \geqq 3$に対しても、n次元球面単体法なるものが存在する（構成することが出来る）と僕は確信しています。

球正1，球正2，球余1，球余2のどれも3つの等式から成っていますね。これら3つの等式は同値です。また、球正余1，球正余2はそれぞれ6つの等式から成っています。これら6つの等式も全て互いに同値です。このことは、内角や辺の長さに与えた識別子を入れ替えただけのことと見做せますから当然ですね（下図参照）。

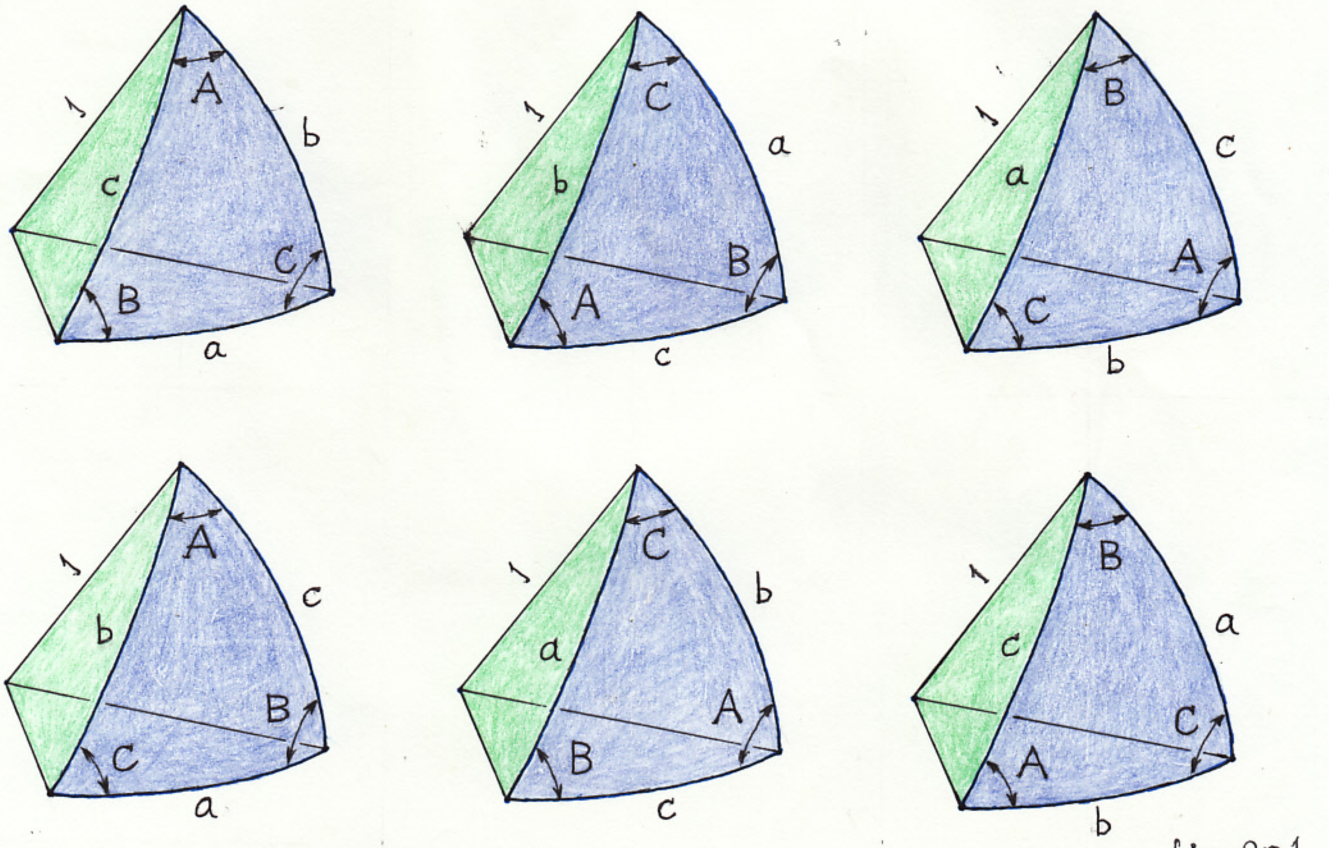


fig.201

上図のどの絵も、Aとa，Bとb，Cとcの相対的な関係は同じです。従って、3つ（あるいは6つ）の等式の内、いずれか1つでも導出（証明）すれば、他の2つ（あるいは5つ）の等式も証明されたことになります。

fig.200の球面3角形$P_AP_BP_C$に対して、2つの右手系の正規直交座標系、XYZ系，X′Y′Z′系を定義します。XYZ系からX′Y′Z′への座標変換は、同じ右手系ですから、回転行列で表現されます。この回転行列を2通り

の方法で計算し、両者を等置するという目論見（Scheme）です。平面3角法の証明で用いたのと同じ戦略（Strategy）ですね。

XYZ系，X'Y'Z'系を下図のように定義します。

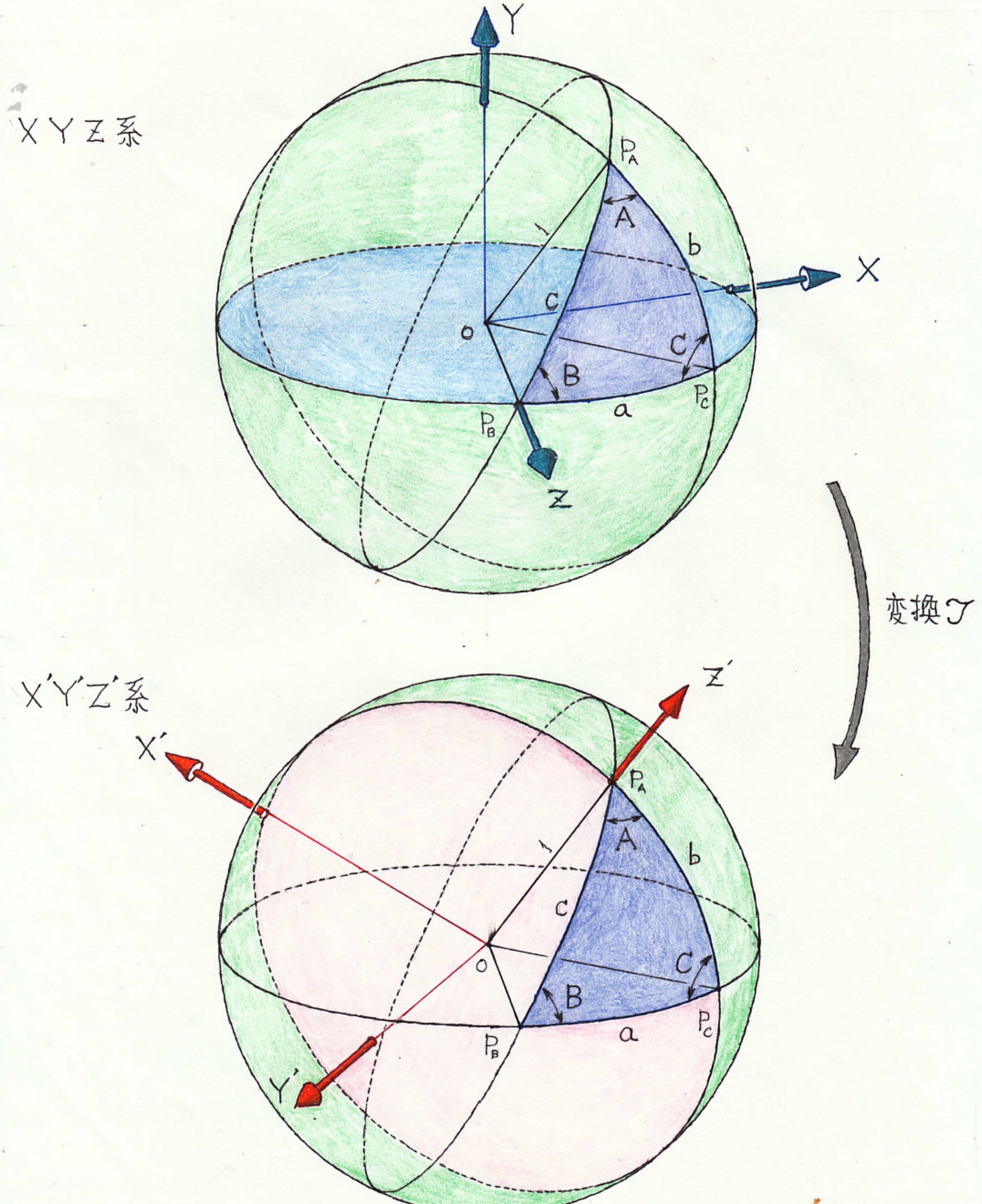
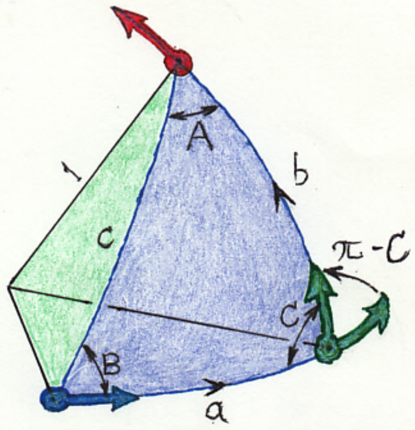


fig.202

【P403】6月21日(月) 球面3角法(続き)

変換 $\mathcal{T}_1$



変換 $\mathcal{T}_2$

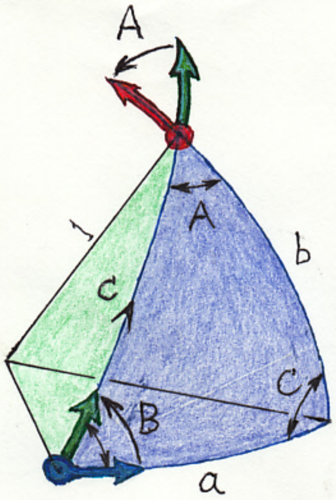


fig.203

XYZ系, X'Y'Z'系はどちらも、単位球の中心Oを原点とする、右手系の正規直交座標系で、

XYZ系 : $\overrightarrow{OP_B}$ 方向をZ軸方向とし、辺 $\widehat{P_B P_C}$ を大円弧とする大円が乗っている平面をZX平面とする座標系です。

X'Y'Z'系 : $\overrightarrow{OP_A}$ 方向をZ'軸方向とし、辺 $\widehat{P_C P_A}$ を大円弧とする大円が乗っている平面をZ'X'平面とする座標系です。

変換 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ は、

変換 $\mathcal{T}_1$: まず回転 $R_Y(a)$ を行い、次に回転 $R_Z(\pi-C)$ を行い、最後に回転 $R_Y(b)$ を行う変換です。

変換 $\mathcal{T}_2$: まず回転 $R_Z(B)$ を行い、次に回転 $R_Y(c)$ を行い、最後に回転 $R_Z(A)$ を行う変換です。

fig.202, fig.203, 及び上記の説明より、

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 = R_Y(b)\,R_Z(\pi-C)\,R_Y(a)$$

$$= \mathcal{T}_2 = R_Z(A)\,R_Y(c)\,R_Z(B) \qquad (W1)$$

【P404】6月22日（火）球面3角法（続き）

$\mathcal{T}_1$ $\mathcal{T}_2$を計算します。 定理（87）を参照して下さい。

$$\mathcal{T}_1 = R_Y(b)R_Z(\pi - C)R_Y(a)$$

$$= R_Y(b)\begin{pmatrix} -\cos C & \sin C & 0 \\ -\sin C & -\cos C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos a & 0 & -\sin a \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin a & 0 & \cos a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos b & 0 & -\sin b \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin b & 0 & \cos b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\cos a\cos C & \sin C & \sin a\cos C \\ -\cos a\sin C & -\cos C & \sin a\sin C \\ \sin a & 0 & \cos a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\cos a\cos b\cos C - \sin a\sin b & \cos b\sin C & \sin a\cos b\cos C - \cos a\sin b \\ -\cos a\sin C & -\cos C & \sin a\sin C \\ -\cos a\sin b\cos C + \sin a\cos b & \sin b\sin C & \sin a\sin b\cos C + \cos a\cos b \end{pmatrix} \tag{W2}$$

$$\mathcal{T}_2 = R_Z(A)R_Y(c)R_Z(B)$$

$$= R_Z(A)\begin{pmatrix} \cos c & 0 & -\sin c \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin c & 0 & \cos c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos B & \sin B & 0 \\ -\sin B & \cos B & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos A & \sin A & 0 \\ -\sin A & \cos A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos c\cos B & \cos c\sin B & -\sin c \\ -\sin B & \cos B & 0 \\ \sin c\cos B & \sin c\sin B & \cos c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos c\cos A\cos B - \sin A\sin B & \cos c\cos A\sin B + \sin A\cos B & -\sin c\cos A \\ -\cos c\sin A\cos B - \cos A\sin B & -\cos c\sin A\sin B + \cos A\cos B & \sin c\sin A \\ \sin c\cos B & \sin c\sin B & \cos c \end{pmatrix} \tag{W3}$$

【P4Q5】球面3角法（続き）

（W2），（W3）の右辺の行列の（i行，j列）成分を等置します。

$(1,1)\ -\cos a\cos b\cos C-\sin a\sin b=\cos c\cos A\cos B-\sin A\sin B$ $\longrightarrow$ （球正2）

$(1,2)\ \cos b\sin C=\cos c\cos A\sin B+\sin A\cos B$ $\longrightarrow$ （球正余2）

$(1,3)\ \sin a\cos b\cos C-\cos a\sin b=-\sin c\cos A$ $\longrightarrow$ （球正余1）

$(2,1)\ -\cos a\sin C=-\cos c\sin A\cos B-\cos A\sin B$

$(2,2)\ -\cos C=-\cos c\sin A\sin B+\cos A\cos B$ $\longrightarrow$ （球余2）

$(2,3)\ \sin a\sin C=\sin c\sin A$ $\longrightarrow$ （球正1）

$(3,1)\ -\cos a\sin b\cos C+\sin a\cos b=\sin c\cos B$

$(3,2)\ \sin b\sin C=\sin c\sin B$

$(3,3)\ \sin a\sin b\cos C+\cos a\cos b=\cos c$ $\longrightarrow$ （球余1）

（球正1），（球正2），（球余1），（球余2），（球正余1），（球正余2）、球面3角法の全ての公式が導出されました。　Q.E.D.

（球余1）を変形しましょう。

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A$$
$$=\cos b\cos c-\sin b\sin c+\sin b\sin c(1-\cos A)$$

$$\cos a-\cos(b+c)=\sin b\sin c(1+\cos A)\qquad\text{(W4)}$$

（球余2）を変形しましょう。

$$\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a$$
$$\cos(\pi-A)=\cos B\cos C-\sin B\sin C\cos a$$
$$=\cos B\cos C-\sin B\sin C+\sin B\sin C(1-\cos a)$$

$$\cos(\pi-A)-\cos(B+C)=\sin B\sin C(1-\cos a)\qquad\text{(W5)}$$

ところで、(125), (131) より

$$0 \leqq a, b, c, A, B, C \leqq \pi \qquad \text{(W6)}$$

ここで 等号は病的な球面3角形の場合に限ります。

(W4), (W5), (W6) より

$$\cos a \geqq \cos(b+c) \qquad \text{(W7)}$$

$$\cos(\pi - A) \geqq \cos(B+C) \qquad \text{(W8)}$$

さて、一般に下記が成り立ちます。

$0 \leqq x \leqq \pi$ かつ $0 \leqq y \leqq 2\pi$ かつ $\cos x \geqq \cos y$ ならば

$$x \leqq y \leqq 2\pi - x$$

定理(133)

これは下図より自明です。

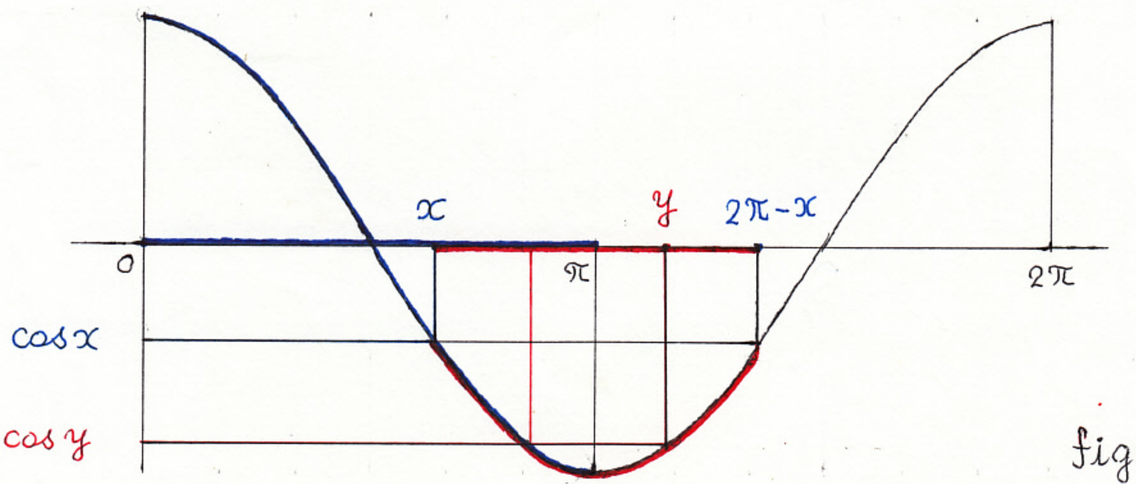


fig.204

(W6), (W7), (W8), (133) より

$$a \leqq b+c \leqq 2\pi - a \qquad \text{(W9)}$$

$$\pi - A \leqq B+C \leqq \pi + A \qquad \text{(W10)}$$

【P407】球面3角法(続き)

(W9),(W10)を定理として再記しておきましょう。

球面3角不等式

$$
\begin{aligned}
a + b &\geqq c\\
b + c &\geqq a\\
c + a &\geqq b
\end{aligned}
\qquad .1)
$$

$$a + b + c \leqq 2\pi \qquad .2)$$

$$
\begin{aligned}
A + B &\leqq C + \pi\\
B + C &\leqq A + \pi\\
C + A &\leqq B + \pi
\end{aligned}
\qquad .3)
$$

$$A + B + C \geqq \pi \qquad .4)$$

いずれの不等式も、等号は病的な球面3角形に限ります。

定理(134)

『球面3角法』はこれぐらいにしておきましょう。

球面3角法と平面3角法の関係，球面3角法の諸公式間の関係，諸公式に見られるある種の対称性，… 等々。これらについては主題を改めて論じる予定です。

【P408】小休止：Here am I.（その2）

● 小休止：Here am I.（その2）

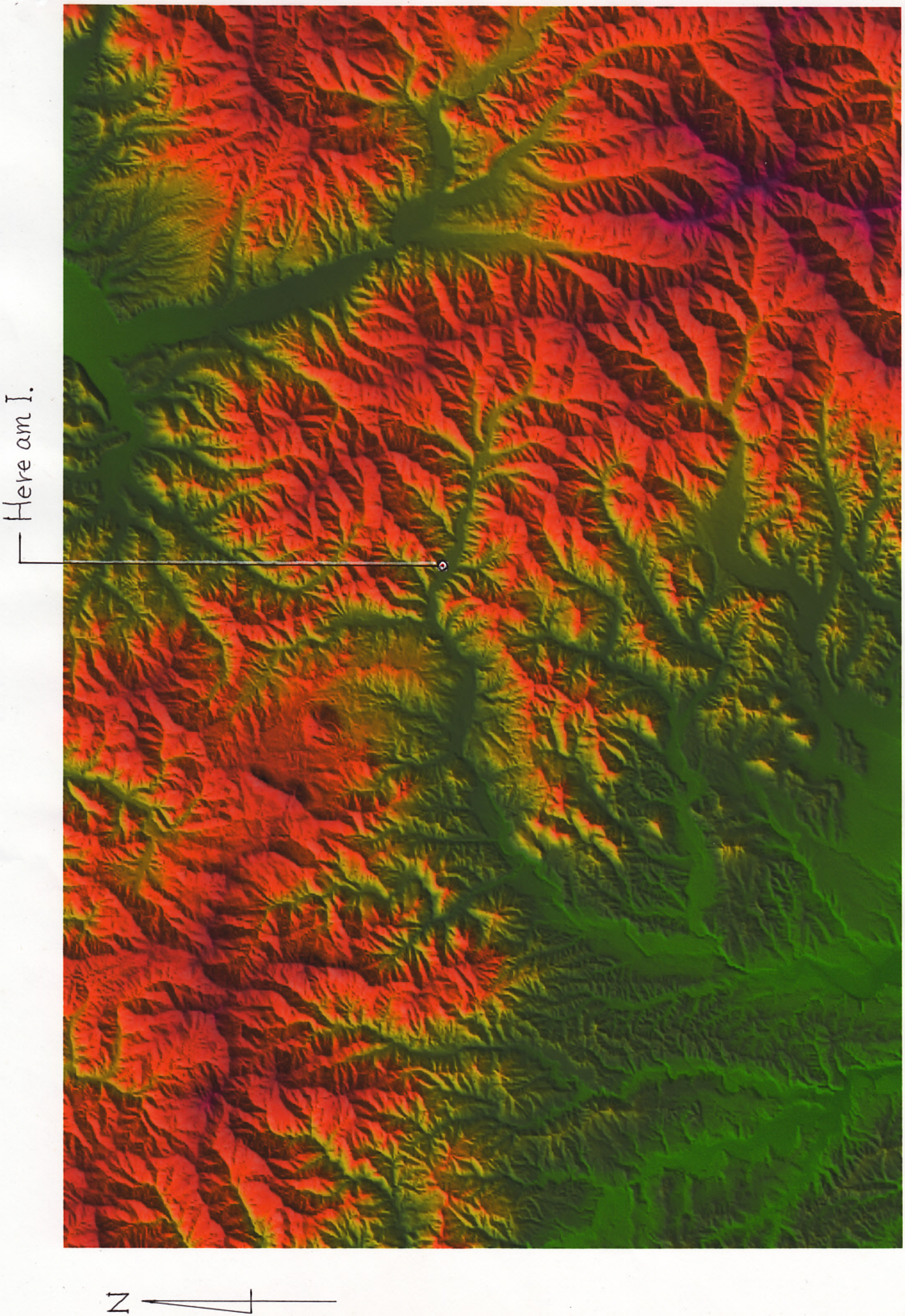


fig.205