【P320】2021年4月20日(火) 平面3角法

● 平面3角法

3角形の3つの内角(Interior Angles)と3つの辺(Sides)の長さとの間に成り立つ諸等式の呈示，証明を行ないましょう。

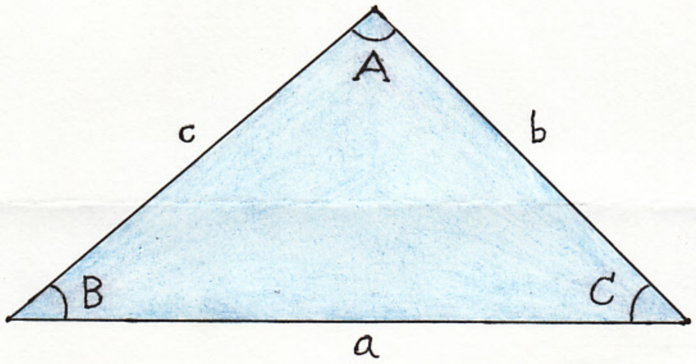


fig.161

平面3角法の諸公式：fig.161の3角形に関して下記が成り立ちます。

才1正弦公式(正1)
$$a\sin B = b\sin A \qquad .1)$$
$$b\sin C = c\sin B$$
$$c\sin A = a\sin C$$

才2正弦公式(正2)
$$\sin A = \sin B\cos C + \cos B\sin C \qquad .2)$$
$$\sin B = \sin C\cos A + \cos C\sin A$$
$$\sin C = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$

才1余弦公式(余1)
$$a = b\cos C + c\cos B \qquad .3)$$
$$b = c\cos A + a\cos C$$
$$c = a\cos B + b\cos A$$

才2余弦公式(余2)
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \qquad .4)$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

才3余弦公式(余3)
$$\cos A = -\cos B\cos C + \sin B\sin C \qquad .5)$$
$$\cos B = -\cos C\cos A + \sin C\sin A$$
$$\cos C = -\cos A\cos B + \sin A\sin B$$

定理(92)

【P321】4月21日(水) 平面3角法(続き)

大文字のCと小文字のcの両方が登場しているので混乱しない様にして下さい。第1, 第2等の採番は僕です。"第1正弦公式"等の名称は僕の造語です。一般に流布している訳では有りません。"第1正弦公式"を略して"余1"を呼ぶことにします。他も同様です。通常は(92)の5つの公式の内、正1と余2の2つだけを総称して平面3角法と呼びます。正1, 余2は単に正弦公式, 余弦公式と呼ばれています。後で球面3角法を考察する予定です。混乱を避けるために、正1を敢て**平面正1**あるいは**平正1**と呼ぶ場合も有るでしょう。他の公式についても同様です。

また、当文書の主題との関係から、平面3角法を、2次元平面単体法とも呼ぶことにします。一般に、$n \geq 3$なる整数に対しても、n次元平面単体法なる命題群が存在すると、僕は考えています。貴方はどう考えますか？ それを追求するのが、当文書の目標の1つです。叶わぬ夢で終る可能性は大です。唯、3次元平面単体法つまり、**平面4面体法**については、目下、手応えを感じている所です。

正1, 正2, 余1, 余2, 余3のどれも3つの等式から成っていますね。これら3つの等式は同値です。このことは、内角や辺の長さに与えた識別子を入れ替えただけと見做せますから、当然ですね。(下図参照のこと)。

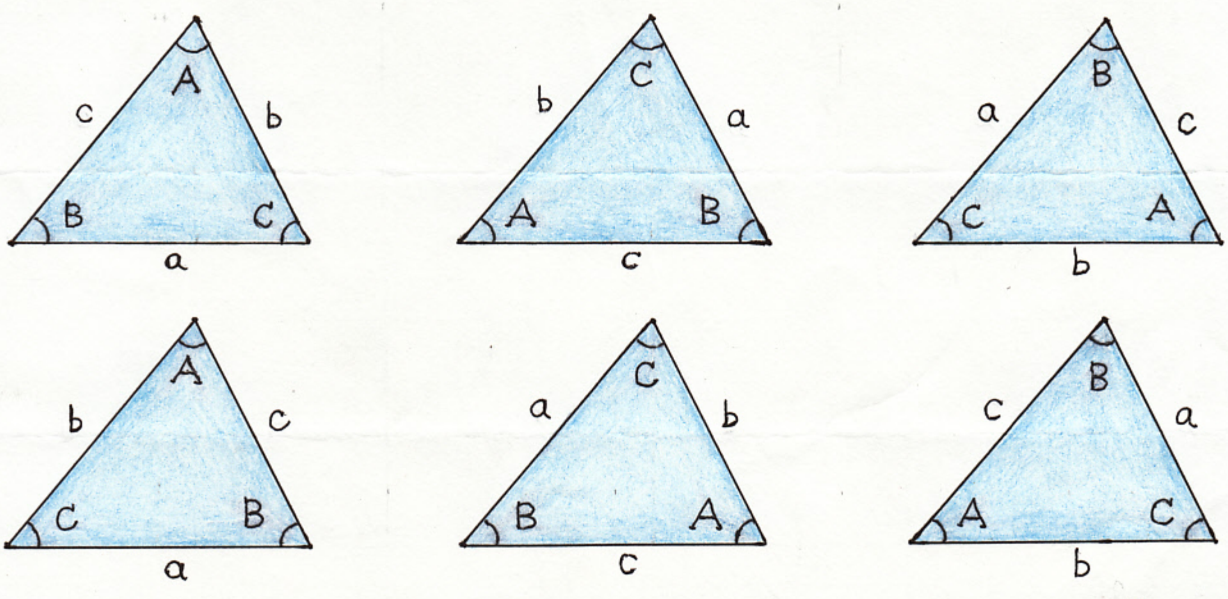


fig.162

【P322】平面3角法（続き）

従って、3つの等式の内どれか1つでも導出（証明）すれば、他の2つの等式も証明されたことになります。このことに留意していて下さい。後述予定の球面3角法でも同様の理屈を用いることになる筈です。

(92)の証明を行いましょう。まず（余1）と（余2）が同値であることを示します。

（余1）➡（余2）を示しましょう。

$$
\begin{aligned}
a^2+b^2 &= aa+bb \\
&= a(b\cos C + c\cos B) + b(c\cos A + a\cos C) \\
&= c(a\cos B + b\cos A) + 2ab\cos C \\
&= c^2 + 2ab\cos C \ /\!\!/
\end{aligned}
$$

（余2）➡（余1）を示します。

$$
\begin{aligned}
b\cos C + c\cos B &= b\,\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} + c\,\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} \\
&= \frac{1}{2a}(a^2+b^2-c^2+c^2+a^2-b^2) \\
&= a \ /\!\!/
\end{aligned}
$$

上記では $abc \fallingdotseq 0$ を仮定していますが、何れかの辺の長さが0である3角形とはどんな3角形となるのかを考えてみましょう。問題は無いですね。

個人的な好み（Liking）からすれば、才1余弦公式の方がより単純で美しいと思いますが、才2余弦公式の方が余弦公式として一般に取り上げられるのは何故でしょうか？ 多分（Perhaps）それは、才2余弦公式が実用上より有用だ（Useful）からかもしれません。(余1)が3つの辺の長さと2つの内角の合計5つの量の関係式であるのに対して、(余2)では4つの量の関係式です。とりわけ角度量は1つしか登場しません。これが(余2)の有用性の理由だと思います。又、更に直角3角形の場合には、(余2)はPythagorasの定理に一致します。(余2)は、もう

1つの、Pythagorasの定理の一般化とも云えますね。この事も(余2)の有用性の理由の1つとして考えられます。きまっている!

さて、(92)の証明に戻りましょう。『3次元の回転と平行移動』で論じた回転$R_\mu(\theta)$と平行移動$P(\lambda)$を用いて、(余2)以外の4つの公式、(正1), (正2), (余1), (余3)を同時に導出しよう。平行移動$P_x(\lambda)$を次式で定義します。

$$P_x(\lambda) = P({}^t(\lambda, 0)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(W1)}$$

fig.161の3角形に対して、2つの正規直交座標系、XY座標系, X'Y'座標系を下図のように定義します。

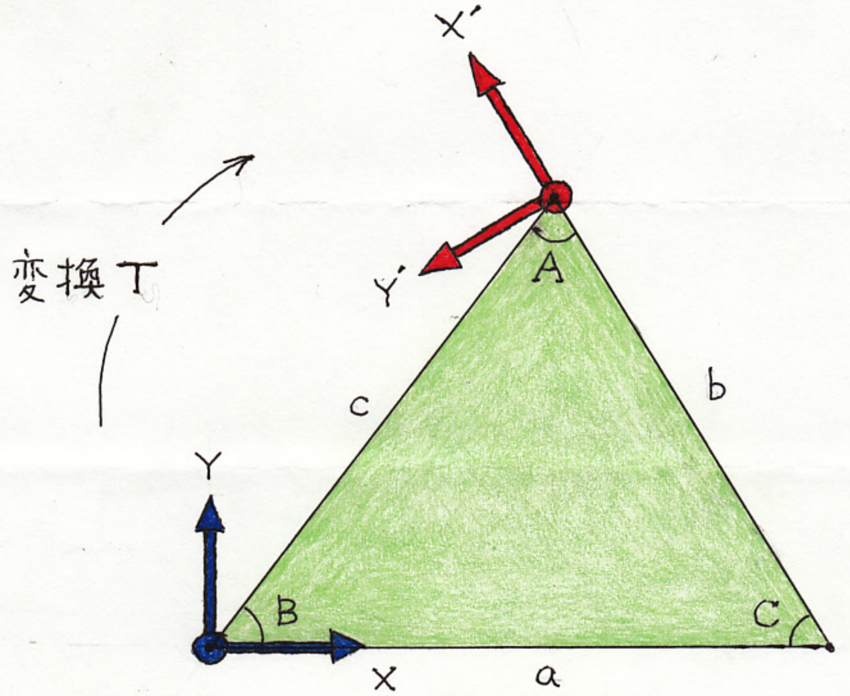


fig.163

XY系で${}^t(x, y)$と表わされる点が、X'Y'系では${}^t(x', y')$と表わされるとき、座標変換Tによって次式で表わされるとします。

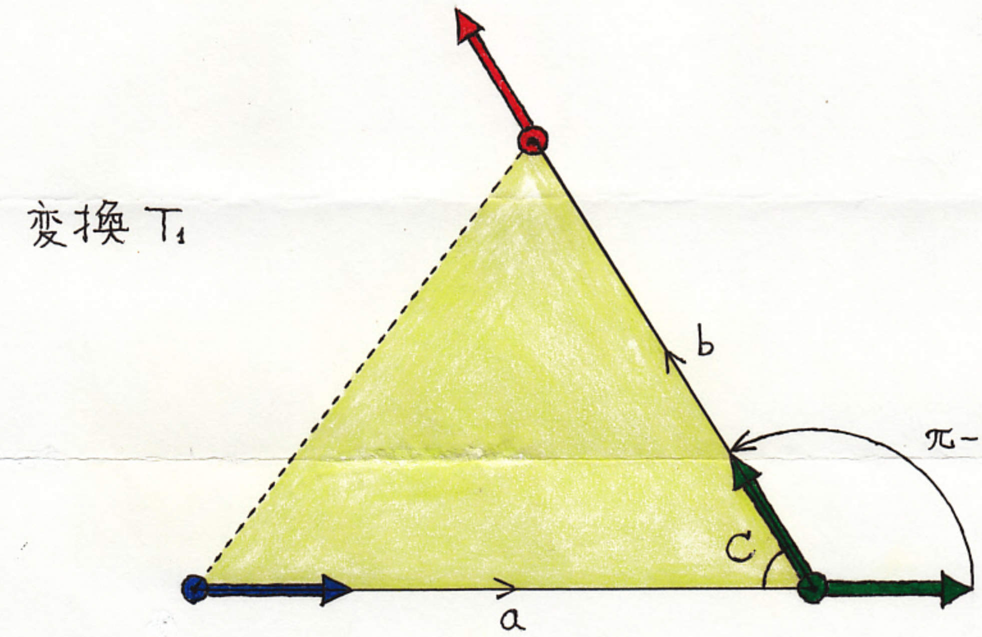
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(W2)}$$

Tを2通りの方法で計算しよう。それらを、T_1, T_2とします。

$$T_1 = T = T_2 \tag{W3}$$

T_1は下図で表わされる変換です。

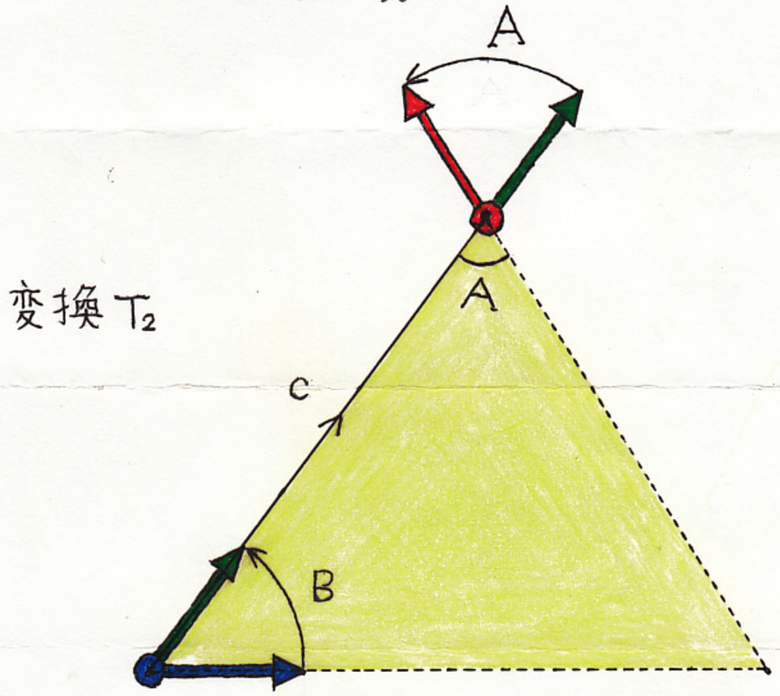
fig.164



まず平行移動$P_x(a)$を行います。次に回転$R_z(\pi - C)$を行い、最後に、また平行移動$P_x(b)$を行います。

T_2は下図で表わされる変換です。

fig.165



まず回転$R_z(B)$を行います。次に平行移動$P_x(c)$を行い、最後に、また回転$R_z(A)$を行います。

【P325】平面3角法（続き）

T_1, T_2を計算しましょう。

$$T_1 = P_x(b)R_z(\pi - C)P_x(a)$$

$$= P_x(b)\begin{pmatrix} -\cos C & \sin C & 0 \\ -\sin C & -\cos C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\cos C & \sin C & a\cos C \\ -\sin C & -\cos C & a\sin C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} -\cos C & \sin C & a\cos C - b \\ -\sin C & -\cos C & a\sin C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(W4)}$$

$$T_2 = R_z(A)P_x(c)R_z(B)$$

$$= R_z(A)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos B & \sin B & 0 \\ -\sin B & \cos B & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos A & \sin A & 0 \\ -\sin A & \cos A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos B & \sin B & -c \\ -\sin B & \cos B & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

【P326】 4月24日(土) 平面3角法(続き)

$$T_2 = \begin{pmatrix} \cos A\cos B - \sin A\sin B, & \cos A\sin B + \sin A\cos B & -c\cos A \\ -\sin A\cos B - \cos A\sin B, & -\sin A\sin B + \cos A\cos B & c\sin A \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(W5)}$$

(W4), (W5) の右辺の行列の (i行, j列) を等置すれば

$$\begin{array}{llcll}
(1,1) & -\cos C & = & \cos A\cos B - \sin A\sin B & \longrightarrow (余3) \\
(1,2) & \sin C & = & \cos A\sin B + \sin A\cos B & \longrightarrow (正2) \\
(1,3) & a\cos C - b & = & -c\cos A & \longrightarrow (余1) \\
(2,1) & -\sin C & = & -\sin A\cos B - \cos A\sin B & \\
(2,2) & -\cos C & = & -\sin A\sin B + \cos A\cos B & \\
(2,3) & a\sin C & = & c\sin A & \longrightarrow (正1)
\end{array}$$

(余2)以外のすべての平面3角法が導出されました。(余2)は(余1)と同値なことが既に示されていますから、これで定理(92)は証明されました。 行列を用いて、一連のスカラー等式を証明する方法は面白いですね。この方法は球面3角法の証明でも用いられるでしょう。若しかしたら、この方法は3次元平面単体法などでも役立つ(be Useful)かも知れませんね。というよりは、3次元平面単体法(の少なくとものその一部)を見い出すのに使えるかも知れません。

(余2)より、

$$\begin{aligned} (a+b)^2 - c^2 &= a^2 + 2ab + b^2 - a^2 - b^2 + 2ab\cos C \\ &= 2ab(1+\cos C) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

従って、

$$a + b \geq c \qquad \text{(W6)}$$

ここで、自明な命題、$a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ を用いました。

【P327】平面３角法（続き）

３角関数の加法公式

$$\sin(\theta_1+\theta_2) = \sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2$$
$$\cos(\theta_1+\theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2$$

を用いて、（正２）と（余３）の右辺を変形すれば

$$\sin(\pi-A) = \sin(B+C)$$
$$\cos(\pi-A) = \cos(B+C)$$

従って、

$$A+B+C = \pi \qquad \text{(W7)}$$

この式は、僕は中学校で、下図を用いて習い（Lean）ました。

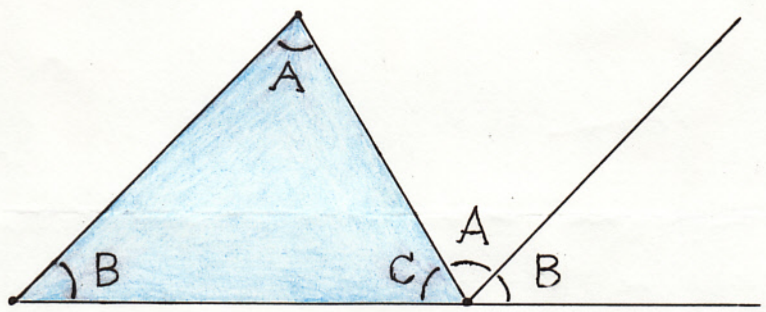


fig. 166

T_1, T_2 で平行移動行列 $P_x(\lambda)$ を用いていますから、多分、同じ理屈に起因する（Originate）のでしょう。（W6），（W7）を定理として再記しておきましょう。

３角不等式と内角の和

$$a+b \geq c \qquad .1)$$
$$b+c \geq a$$
$$c+a \geq b$$

$$A+B+C = \pi \qquad .2)$$

定理（93）

● 小休止：Hidden　　多重点に隠された分割片

無限に拡大すると、そこには何が？　遊びのつもりです。

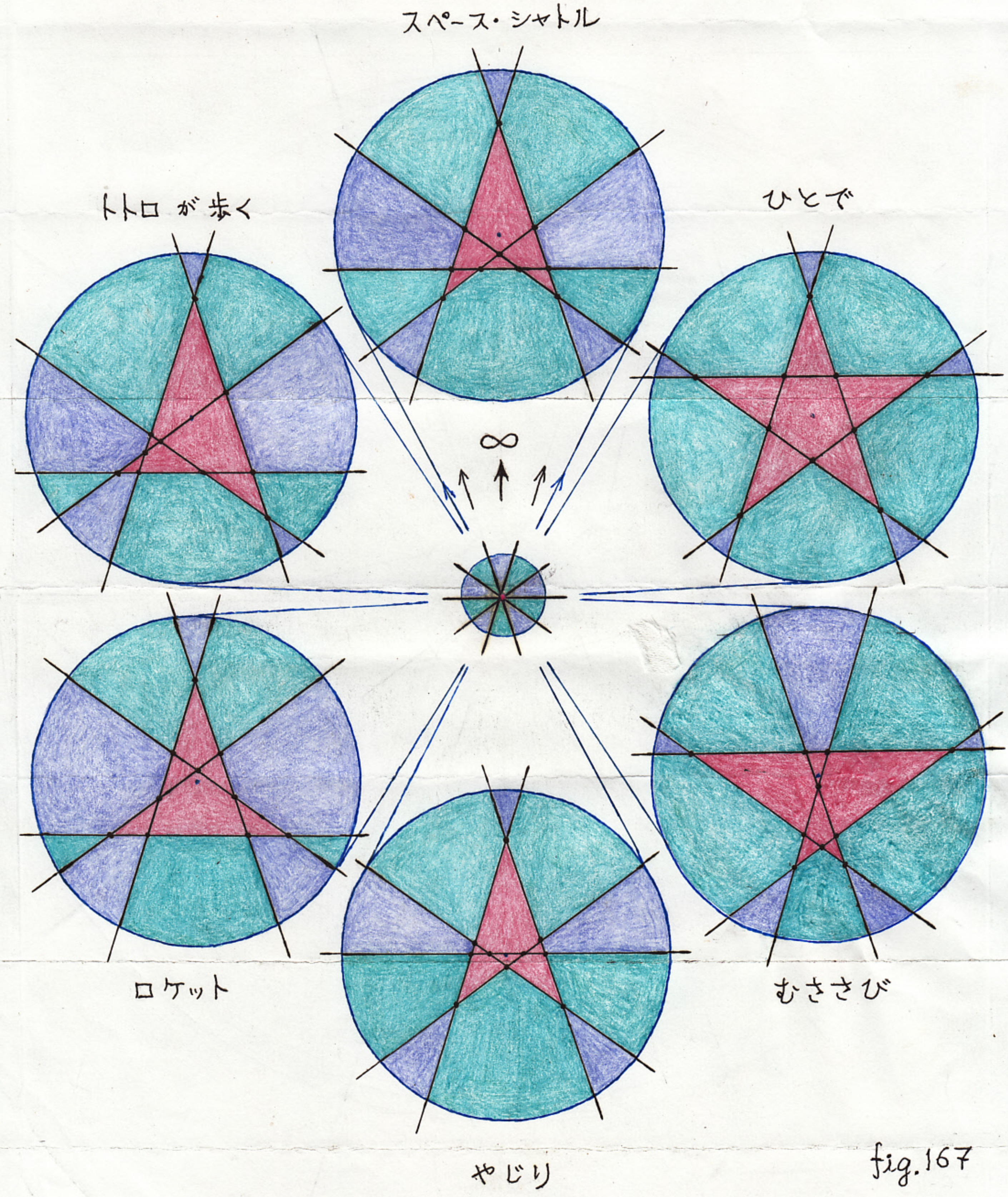


fig.167

5重交点では、位相幾何学的には、上記の6個しか存在しません。但し、全て2重交点だとすればのことです。