【313】 4月16日(金) $1/\sqrt{r_0} = 1/\sqrt{r_1} + 1/\sqrt{r_2}$

● $$\frac{1}{\sqrt{r_0}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$$

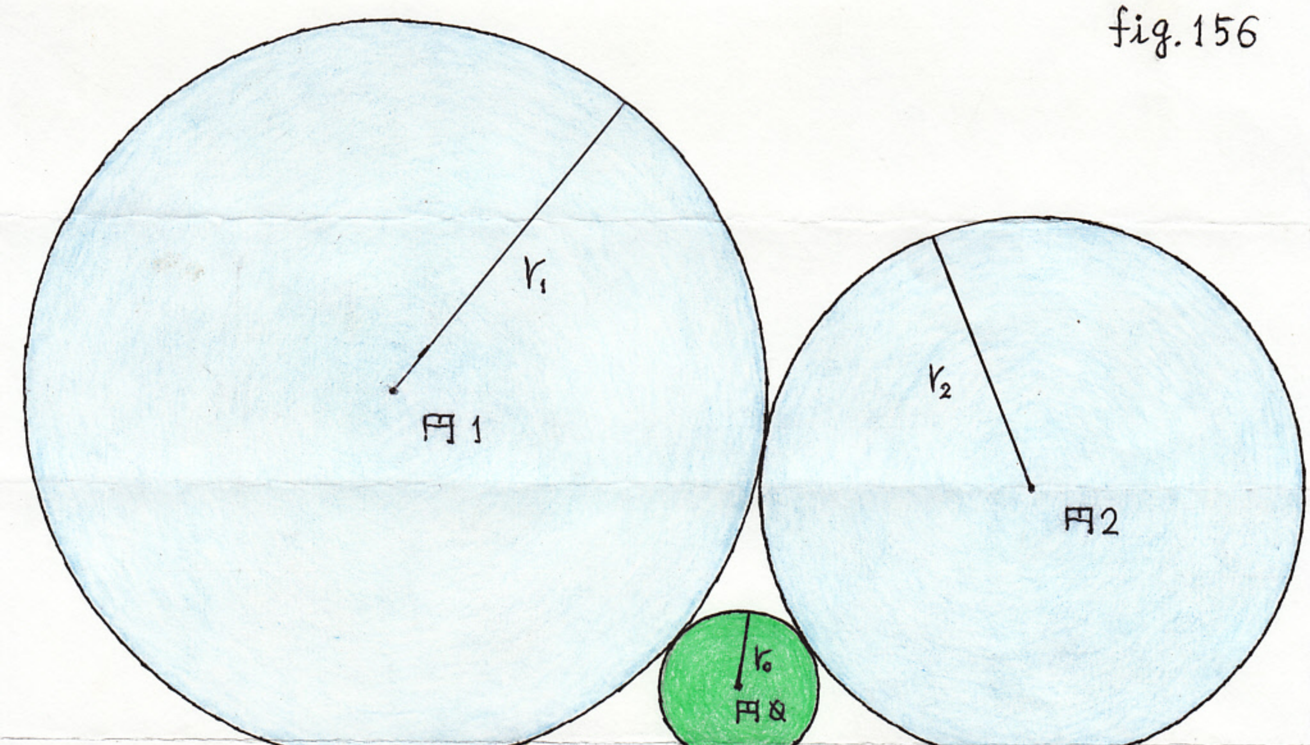
『さざなみ曲線群の呈示』の最後のPage (P078)で、

$$\frac{1}{\sqrt{r_0}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$$

を満たす数学的実体が存在すると僕は述べました。また、それについては後述するつもりであるとも述べましたね。当主題はこの約束を果たすために設けました。後述予定の議論とも関係します。

何のことはない。下記のことです。それだけ

fig.156



上図の関係にある3つの円、円0, 円1, 円2の半径をそれぞれ、r_0, r_1, r_2とすれば、次式を満たします。

$$\frac{1}{\sqrt{r_0}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \qquad \text{定理(89)}$$

【P314】 $1/\sqrt{r_0} = 1/\sqrt{r_1} + 1/\sqrt{r_2}$ （続き）

3つの円、円0，円1，円2は、同一平面上の円たちで、これらは全て他の2つの円と外接しています。さらに全て、同一平面上の1本の直線と、同じ側で接しています。円0は3つの円の中で最も小さい半径を持つ円を指します。

（89）は貴方なら容易く証明できるでしょう。でも一応証明しましょう。後で、もっと一般化した問題として、少なくとも2通りの証明を行う予定です。初等的な証明をしましょう。幾つかの補助線を引きます。

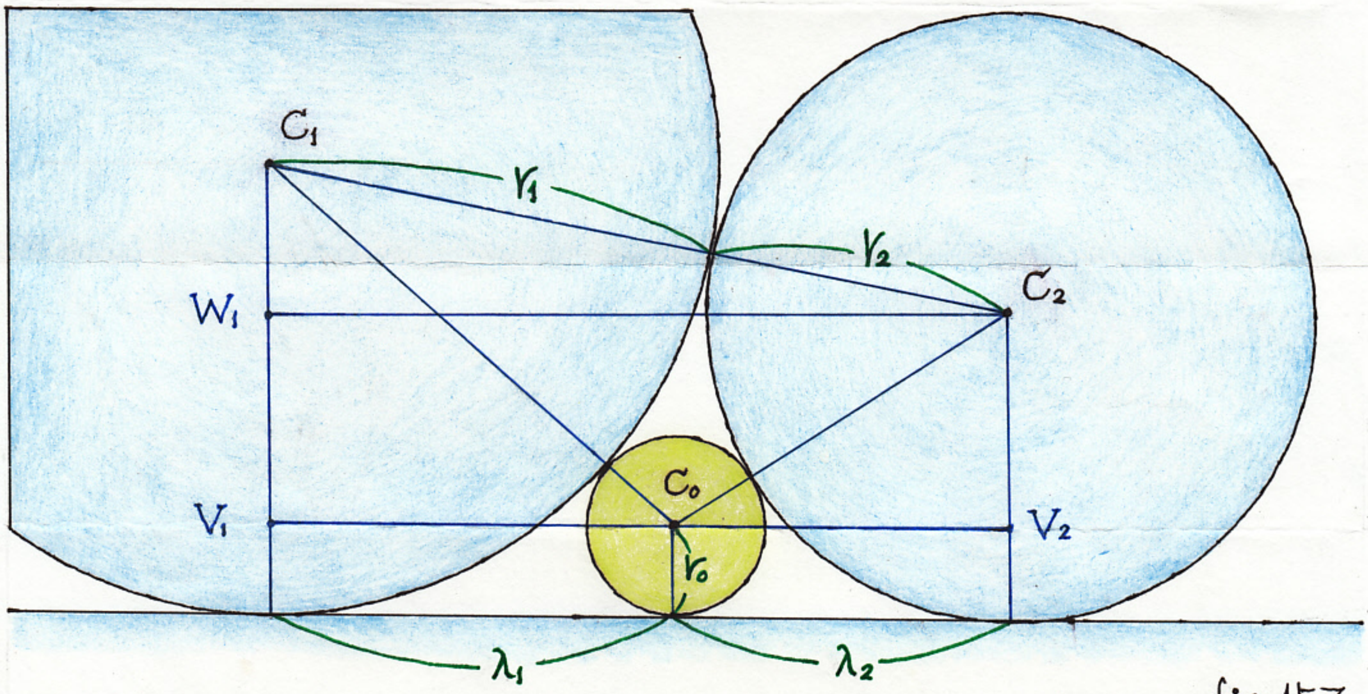


fig.157

Pythagorasの定理が決定的な役目を果たし（Discharg）ます。3つの直角3角形、$\triangle C_1W_1C_2$, $\triangle C_0V_1C_1$, $\triangle C_0V_2C_2$ に注目すれば、

$$(\lambda_1+\lambda_2)^2 = (r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2 = 4r_1r_2 \quad .1)$$

$$\lambda_1^2 = (r_1+r_0)^2-(r_1-r_0)^2 = 4r_1r_0 \quad .2)$$

$$\lambda_2^2 = (r_2+r_0)^2-(r_2-r_0)^2 = 4r_2r_0 \quad .3)$$

（W17）

∴

$$(2\sqrt{r_1r_0}+2\sqrt{r_2r_0})^2 = 4r_1r_2 \quad \text{(W18)}$$

(W18)を r_0 に関して解くと、

$$r_0 = \frac{r_1 r_2}{(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2})^2}$$

両辺の逆数をとれば

$$\frac{1}{r_0} = \left(\frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}\right)^2 \qquad \text{(W19)}$$

これより(89)が得られます。　Q.E.D.

(W19)を変形しよう。右辺を展開すれば

$$\frac{1}{r_0} = \frac{1}{r_1} + \frac{2}{\sqrt{r_1 r_2}} + \frac{1}{r_2}$$

$$\frac{2}{\sqrt{r_1 r_2}} = \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}$$

両辺を2乗して、

$$\frac{4}{r_1 r_2} = \frac{1}{r_0^2} + \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} - \frac{2}{r_0 r_1} + \frac{2}{r_1 r_2} - \frac{2}{r_2 r_0}$$

従って、

fig.156の r_0, r_1, r_2 は次式を満たす。

$$\frac{1}{r_0^2} + \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} - \frac{2}{r_0 r_1} - \frac{2}{r_1 r_2} - \frac{2}{r_2 r_0} = 0 \qquad \text{定理(89)}'$$

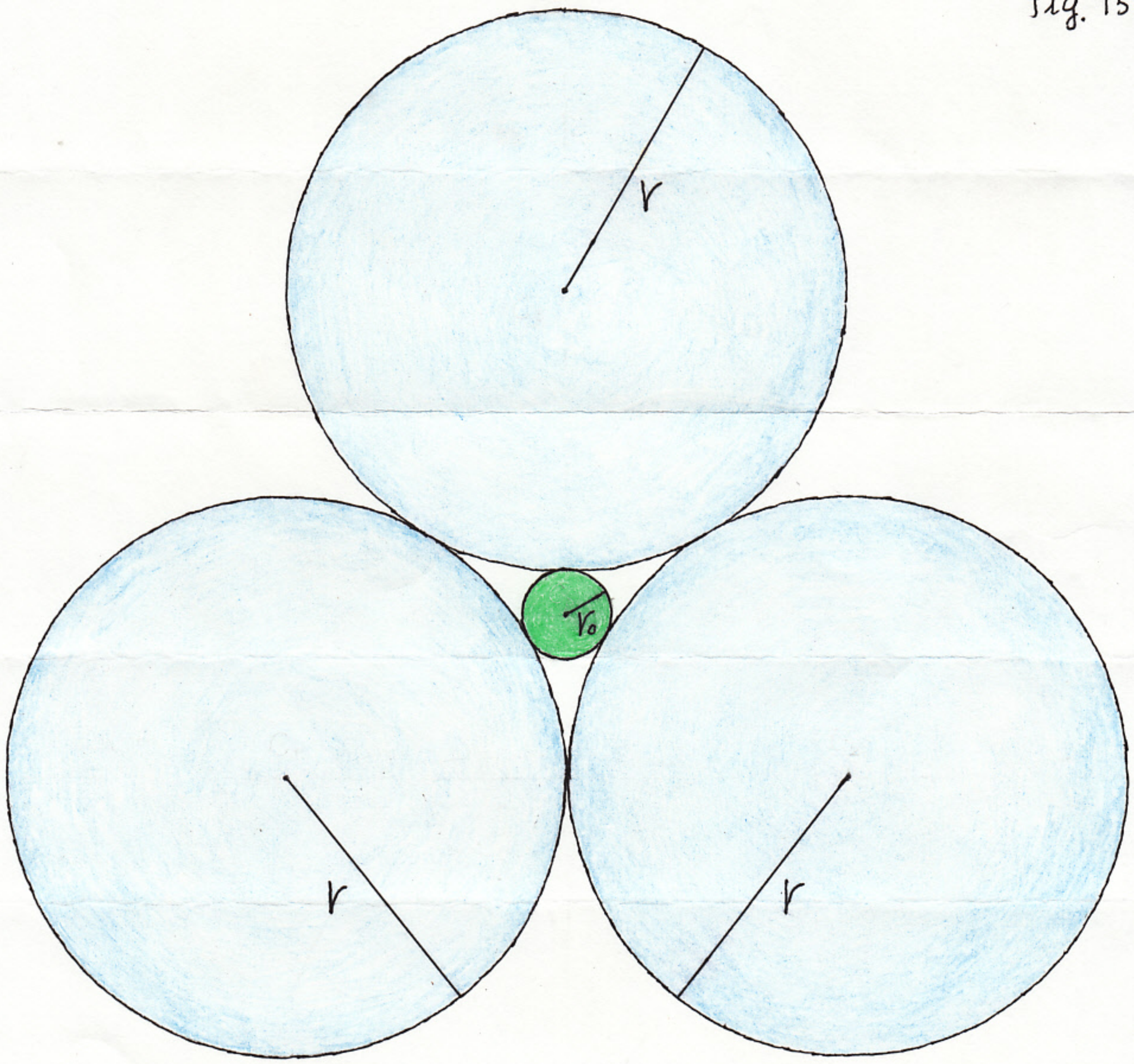
(89)式も美しい式ですが、多少複雑ですが(89)′式も綺麗ですね。何しろ(Anyway, Afer All), r_0, r_1, r_2 に関して対称的です。不思議ですね。

【P316】 $1/\sqrt{r_0} = 1/\sqrt{r_1} + 1/\sqrt{r_2}$ （続き）

fig. 156は、互いに外接し合う4つの円の特殊な場合だと考えられます。オ4の円は直線、つまりその半径が∞の円です。

もう1つの特殊な場合を呈示しましょう。下記です。

fig. 158

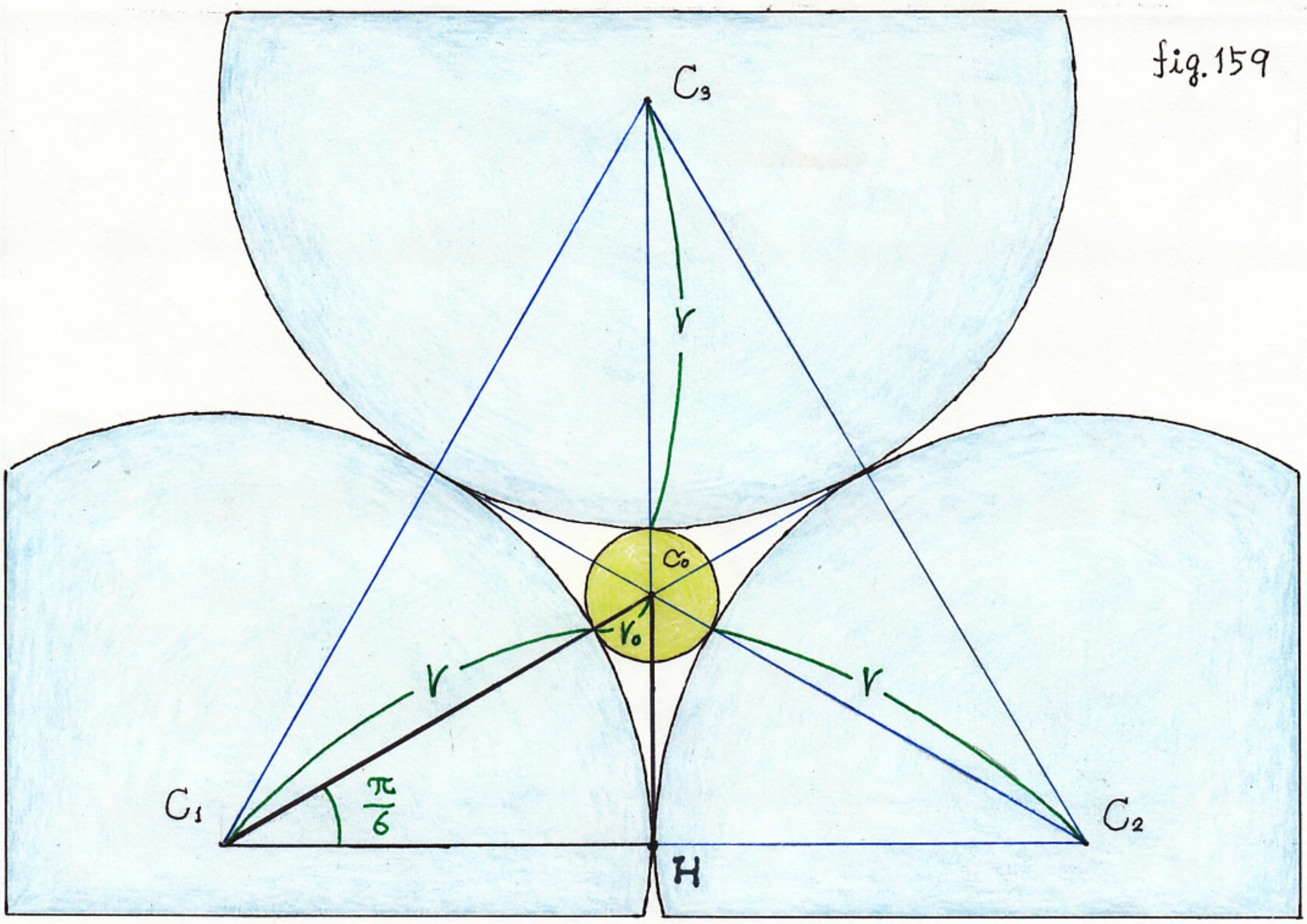


上図の関係にある4つの円の半径、r_0, r は次式を満たします。

$$\frac{1}{r_0} = (3+2\sqrt{3})\frac{1}{r}$$ 定理（90）

補助線を引いて証明します

【P317】4月18日（日） $1/\sqrt{r_0} = 1/\sqrt{r_1} + 1/\sqrt{r_2}$（続き）



$\triangle C_1C_2C_3$は正3角形です。6個の合同な直角3角が見えます。その中のかってな1つ、例えば$\triangle C_0C_1H$に注目すると、

$$\frac{r}{r+r_0} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

r_0について解けば

$$r_0 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) r$$

逆数をとって

$$\frac{1}{r_0} = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}}-1}\,\frac{1}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\,\frac{1}{r} = \frac{\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}\,\frac{1}{r}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}+3}{4-3}\,\frac{1}{r} = (3+2\sqrt{3})\frac{1}{r}$$

Q.E.D.

(90)を変形しよう。

$$\frac{2\sqrt{3}}{r} = \frac{1}{r_0} - \frac{3}{r}$$

両辺を2乗して、

$$\frac{12}{r^2} = \frac{1}{r_0^2} - \frac{6}{r_0 r} + \frac{9}{r^2}$$

$$\frac{1}{r_0^2} - \frac{6}{r_0 r} - \frac{3}{r^2} = 0$$

従って、

fig.158のr_0, rは次式を満たす。

$$\frac{1}{r_0^2} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} - \frac{2}{r_0 r} - \frac{2}{r_0 r} - \frac{2}{r_0 r} - \frac{2}{rr} - \frac{2}{rr} - \frac{2}{rr} = 0$$

定理(90)'

(89)'と(90)'を良く観察しよう。式内における半径の対称性に注意されたし。一般に下記が成り立つと予想されます。

同一平面上で互いに外接し合う4つの円の半径たちをr_0, r_1, r_2, r_3とすれば、次式が成り立つ。

$$\frac{1}{r_0^2} + \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} - \frac{2}{r_0 r_1} - \frac{2}{r_0 r_2} - \frac{2}{r_0 r_3} - \frac{2}{r_1 r_2} - \frac{2}{r_1 r_3} - \frac{2}{r_2 r_3} = 0$$

予想(91)

● 小休止：Penrose Tile (その3)　　by Roger Penrose Himself

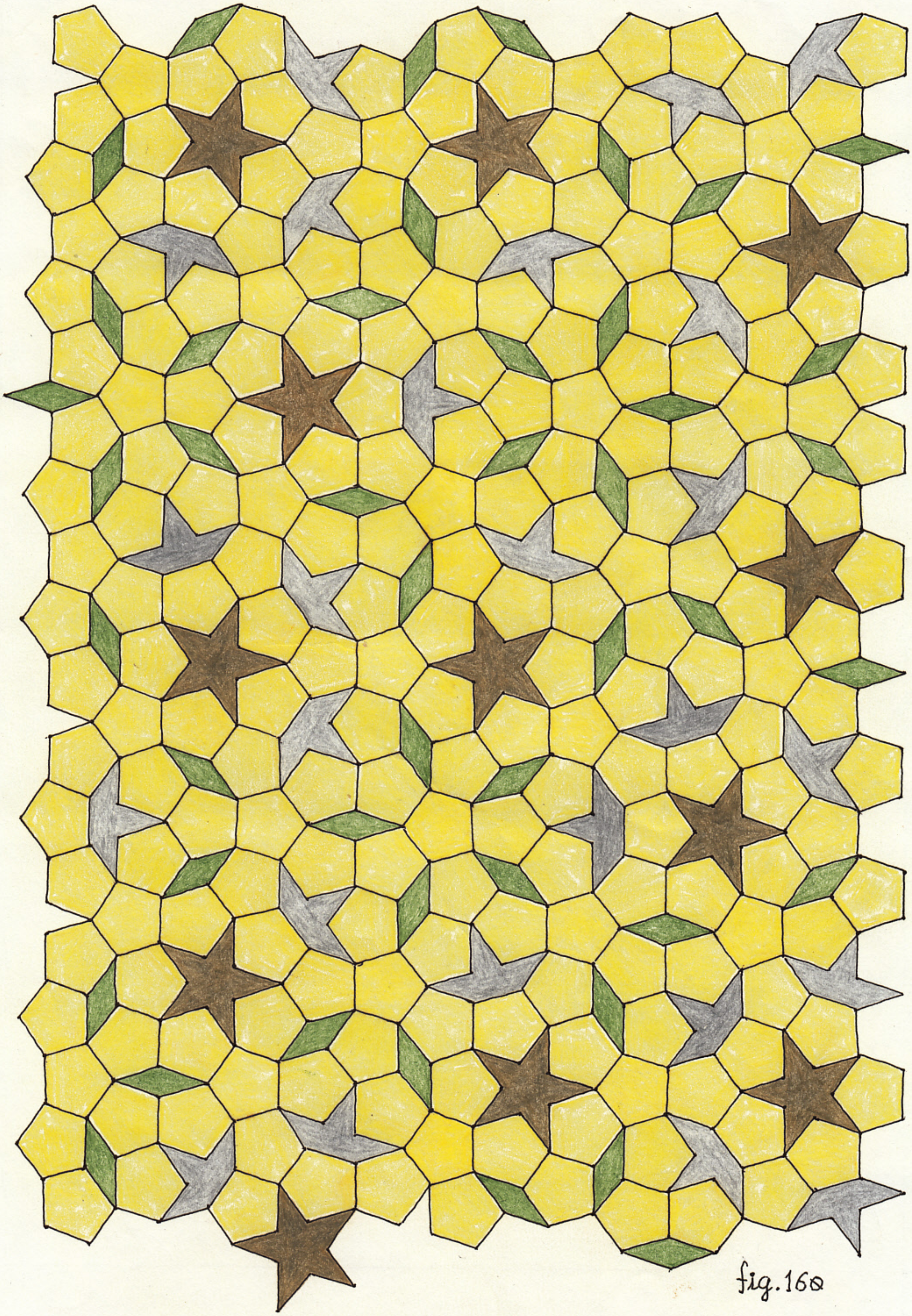


fig.160