● 円周角の定理

円周角の定理

同一の円弧に対応する円周角は全て等しく、中心角の $1/2$ である。下図で $\eta = 1/2 \cdot \theta$.

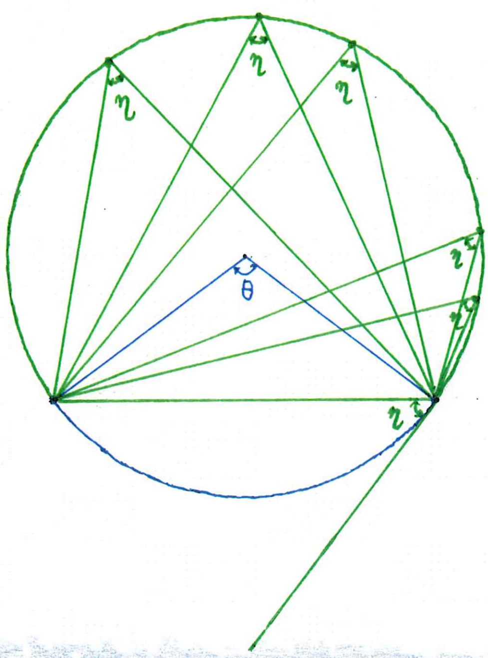


fig. 126

定理(44)

場合分けして証明しよう。

―〈Case 1〉―

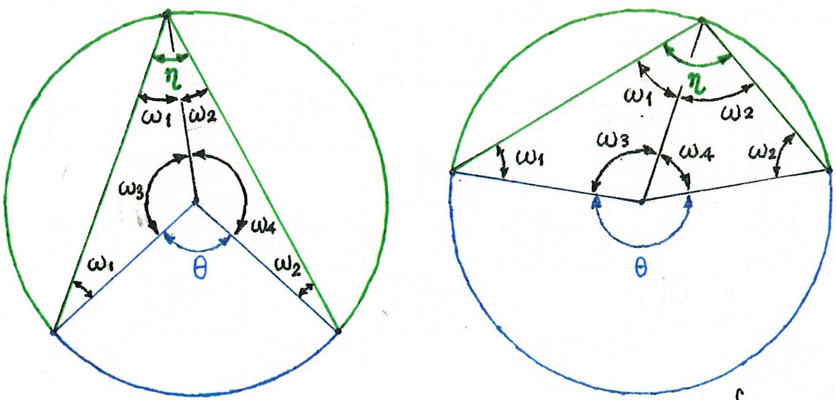


fig. 127.1

- $\eta = \omega_1 + \omega_2$ .1)
- $2\omega_1 + \omega_3 = \pi$ .2)
- $2\omega_2 + \omega_4 = \pi$ .3)
- $\omega_3 + \omega_4 + \theta = 2\pi$ (W1.4)

上記の4式が成り立つのは自明である。これらから直ちに $2\eta - \theta = 0$ が得られる。

【P157】11月19(木)　円周角の定理(続き)

〈Case 2〉

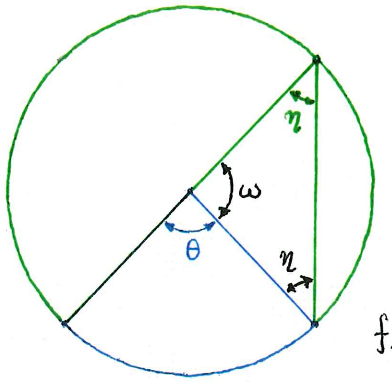


fig. 127.2

- $\omega + \theta = \pi$ $\quad$ .1)
- $\omega + 2\eta = \pi$ $\quad$ (W2.2)

〈Case 3〉

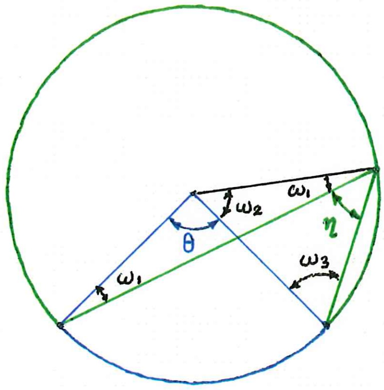


fig. 127.3

- $2\omega_1 + \omega_2 + \theta = \pi$ $\quad$ .1)
- $\eta + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = \pi$ $\quad$ .2)
- $\omega_1 + \eta = \omega_3$ $\quad$ (W3.3)

〈Case 4〉

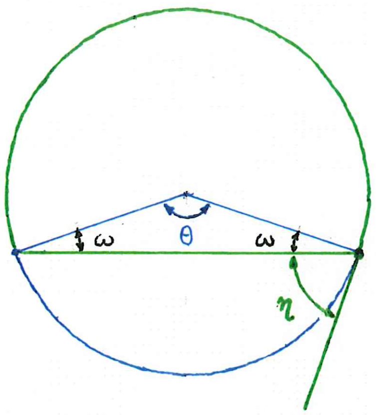


fig. 127.4

- $2\omega + \theta = \pi$ $\quad$ .1)
- $\omega + \eta = \frac{1}{2}\pi$ $\quad$ (W4.2)

〈Case 5〉

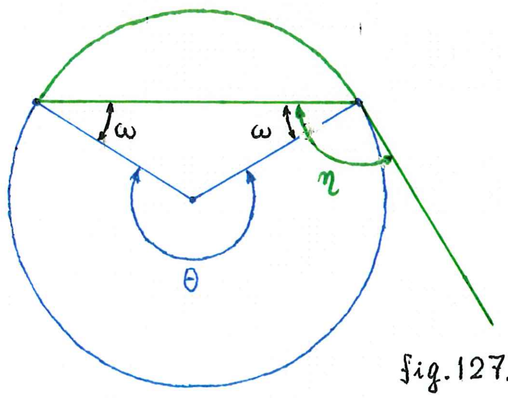


fig. 127.5

- $2\omega + (2\pi - \theta) = \pi$ $\quad$ .1)
- $\eta - \omega = \frac{1}{2}\pi$ $\quad$ (W5.2)

Q.E.D.

● Pythagorasの定理

Pythagorasの定理（その1）

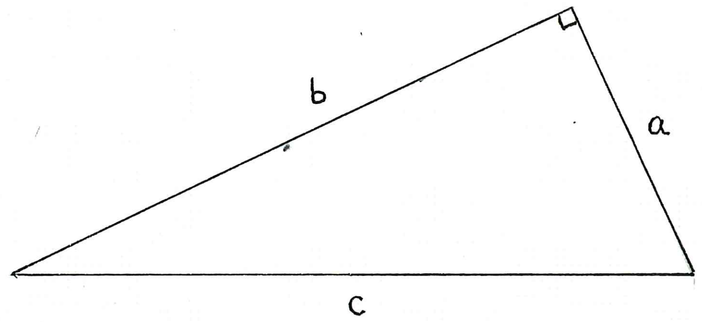


fig.128

上図の直角3角形において、次式が成り立つ。

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{定理(45)}$$

弟から聞いた、Einsteinが10代のころ行ったとされる方法で証明しよう。

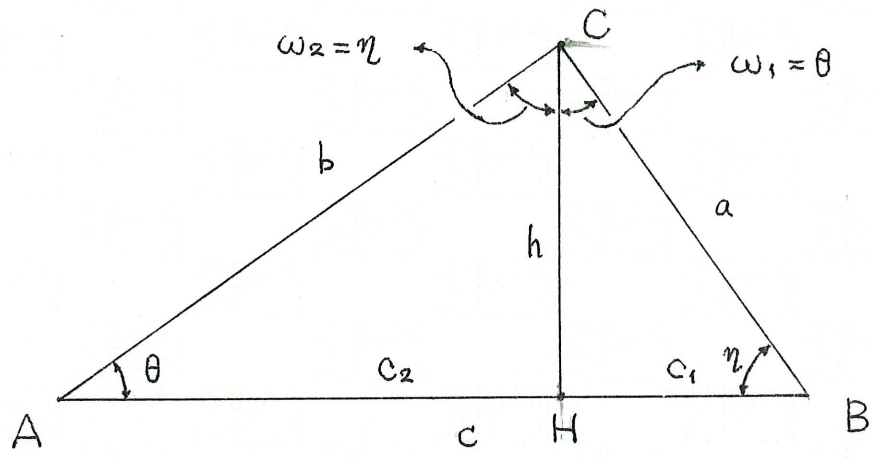


fig.129

頂点Cから辺ABへ垂線をおろし、その足をHとする。$h, c_1, c_2; \theta, \eta, \omega_1, \omega_2$ を上図のように定める。まず、次式が成り立つことを示そう。

$$\omega_1 = \theta \qquad \omega_2 = \eta \qquad (W1)$$

$\triangle ABC$, $\triangle CBH$, $\triangle ACH$ は全て直角3角形だから、

$$\eta + \omega_1 = \frac{1}{2}\pi, \qquad \theta + \omega_2 = \frac{1}{2}\pi, \qquad \eta + \theta = \frac{1}{2}\pi \qquad (W2)$$

これらから直ちに(W1)が導出される。

 Pythagorasの定理（続き）

c_1, c_2の定義より、

$$c = c_1 + c_2 \qquad \text{(W3)}$$

(W1)より、△ABC, △CBH, △ACHは全て互いに相似です。辺の対応関係が分りやすいように、小さい2つの3角形を平行移動、回転、鏡像変換して並べて作図しよう。

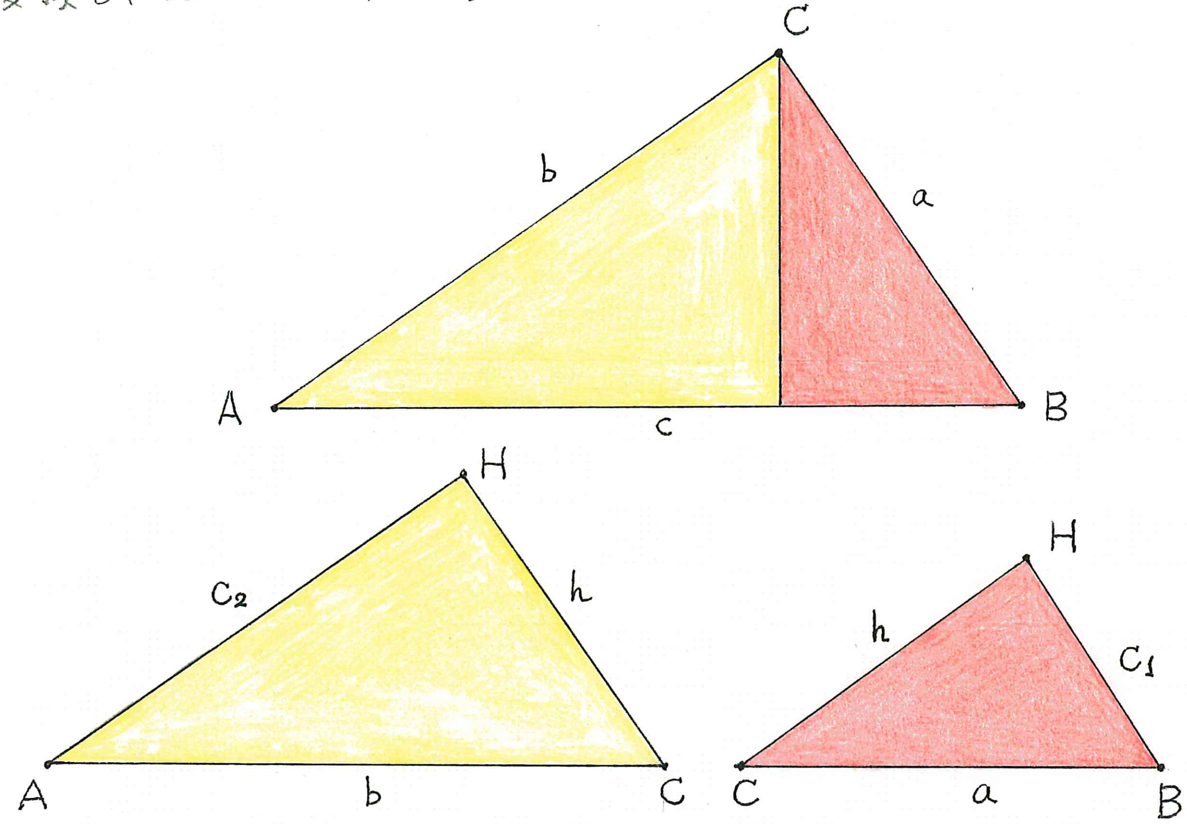


fig.130

△ABCと△CBHが相似だから、

$$\frac{c_1}{a} = \frac{h}{b} = \frac{a}{c} \qquad \therefore \quad c_1 = \frac{a}{b}h, \quad h = \frac{a}{c}b \qquad \text{(W4)}$$

△ABCと△ACHが相似だから、

$$\frac{h}{a} = \frac{c_2}{b} = \frac{b}{c} \qquad \therefore \quad c_2 = \frac{b}{a}h, \quad h = \frac{b}{c}a \qquad \text{(W5)}$$

(W3), (W4), (W5)より、

$$c = c_1 + c_2 = \frac{a}{b}h + \frac{b}{a}h$$

 Pythagorasの定理（続き）

$$c = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)\cdot h = \frac{a^2+b^2}{ab}\cdot\frac{ab}{c}$$

$$= \frac{1}{c}(a^2+b^2) \qquad \text{Q.E.D.}$$

Einsteinはそんなに数学は得意じゃないと思っていましたが、それは同時代の数学者，Minkowshi（1864～1909）やHilbelt（1862～1943）たちと比べるからだと思われます。なかなかのセンスだと思いました。

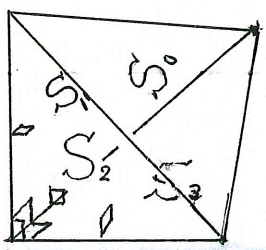
Pythagorasの定理（その2）

n次元ユークリッド空間R^n上に正規直交座標系が与えられているとする。その座標系で任意の2点P, Qが、$P={}^t(p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n)$，$Q={}^t(q_1, q_2, q_3, \cdots, q_n)$と表わされるとする。このときP, Q間の距離$\overline{PQ}$は次式を満たす。

$$(\overline{PQ})^2 = \sum_{i=1}^{n}(p_i - q_i)^2 \qquad \text{定理(46)}$$

（45）と帰納法で証明できます。証明は省略します。（46）は（45）の一般化と云えるでしょう。もう一通りの一般化が存在すると思われます。下記が成り立ちます。

Pythagorasの定理（その3）：直角4面体の表面積に関する定理



$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \qquad \text{予告(47)}$$

これについては、もっと一般化した式として後で呈示，証明する予定です。一般に、n次元直角単体に関して同様の式が成り立つと思われます。当文書の主題の1つだと云えます。面白いというか、ちょっと不思議ですね。

● 3次元のベクトル解析

3次元のアファイン空間上のベクトル，ベクトル場，スカラー場にに関して成り立つ諸恒等式の呈示，証明を行います。

3次元アファイン空間に1つの正規直交座標系が与えられているとします。ベクトル，ベクトル場，スカラー場，微分演算子は全てこの座標系で表現されているとします。ベクトルの表記法の約束を行いましょう。

ベクトルの表記法

3行1列の行列として表現することにします。またその識別記号は太文字$\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$, …, $\mathbb{U}$, $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$などを用いることにします。その成分は太文字でない同じ文字で表現することに勉めることにします。

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = {}^t\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix} \tag{.1}$$

$${}^t\mathbb{A} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix} = {}^t\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \tag{.2}$$

$$\mathbb{A}\big|_i = A_i \tag{.3}$$

$$\mathbb{A}\big|_i = \mathbb{B}\big|_i \quad (i=1,2,3) \iff \mathbb{A} = \mathbb{B} \tag{.4}$$

表記の約束(48)

行列Mに対して${}^tM$はMの転置行列を指します。ベクトルを1×3ではなく3×1の行列として表現するのは，横書の文章中ではスペース的に不便ですが，利点があります。それは，左側から3×3の行列を掛けることが出来るということです。これは重要な利点です。

まず、2つのベクトルに対して定まる内積と呼ばれるスカラーと外積と呼ばれるベクトルの定義を行いましょう。

内積と外積の定義

$\mathbb{A} = {}^t[A_1\ A_2\ A_3],\ \mathbb{B} = {}^t[B_1\ B_2\ B_3],\cdots$ とします。

$$\mathbb{A}\cdot\mathbb{B} = A_iB_i = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 \quad .1)$$

$$[\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}] = {}^t\mathbb{A}\mathbb{B} = [A_1\ A_2\ A_3]\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} \quad .2)$$

$$\mathbb{A}\times\mathbb{B} = \begin{bmatrix} A_2B_3 - A_3B_2 \\ A_3B_1 - A_1B_3 \\ A_1B_2 - A_2B_1 \end{bmatrix} \quad .3)$$

$$\mathbb{A}\times\mathbb{B}\Big|_i = \varepsilon_{ikl}A_kB_l \quad (i = 1, 2, 3) \quad .4)$$

$$[\mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{C}] = \mathbb{A}\cdot(\mathbb{B}\times\mathbb{C}) \quad .5)$$

$\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}$ を $\mathbb{A}$ と $\mathbb{B}$ の内積(Inner Product, Scalar Product, Dot Product)と呼びます。

$\mathbb{A}\times\mathbb{B}$ を $\mathbb{A}$ と $\mathbb{B}$ の外積(Outer Product, Vector Product, Cross Product)と呼びます。

.5)の左辺の記号をGrassmann記号と呼び、右辺で表現されるスカラーをスカラー3重積(Triple Scalar Product)と呼びます。

定義(49)

.1)の添字i, .4)の添字k, lはどれもダミー添字です。つまり全て1, 2, 3に渡って和をとることを意味します。.4)のε_{ikl}は3階の反対称単位テンソルです。これについては『Shyuko記号とCayley-Hamiltonの定理』で論じましたね。ε_{ikl}が関与する恒等式の証明で本質的な働きをするのが（20.2）です。ここに再記しておきましょう。

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl} \qquad \text{再記(20.2)}$$

(49.1)と.2)が同値なこと、.3)と.4)が同値なことは自明です。.4)における（$i=1, 2, 3$）の様な注釈は今後、混乱が生じない限りにおいて省略することにします。特に証明の際にはそうすることになるでしょう。

スカラー場（Scalar Field, Scalar Point Function）$\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3)$やベクトル場（Vector Field）$\mathbb{U}|_i = U_i(x_1, x_2, x_3)$に関する微分を定義しよう。

微分演算子の定義

$$\nabla = {}^t\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\ \frac{\partial}{\partial x_2}\ \frac{\partial}{\partial x_3}\right], \quad \nabla|_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad .1)$$

$$\nabla^2 = \nabla\cdot\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i} \qquad .2)$$

$$\mathrm{grad}\,\varphi = \nabla\varphi, \quad \mathrm{grad}\,\varphi|_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi \qquad .3)$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbb{U} = \nabla\times\mathbb{U}, \quad \mathrm{rot}\,\mathbb{U}|_i = \varepsilon_{ikl}\frac{\partial}{\partial x_k}U_l \qquad .4)$$

$$\mathrm{div}\,\mathbb{U} = \nabla\cdot\mathbb{U} = \frac{\partial}{\partial x_i}U_i \qquad .5)$$

定義(50)

∇はNabraと呼ばれることもあります。Nabraの語源はAssyriaの竪琴だそうです。Hamiltonが最初に用いたとのことです。

∇^2はLaplacianと呼ばれΔと記すこともあります。∇や∇^2は4次元以上の空間においても定義することができます。gradやdivもそうですね。n次元のLaplacianの極座標表現については主題をあらためて後で議論したいと思っています。gradはGradient(勾配)の略で、divはDivergence(発散)の略で、rotはRotation(回転)の略です。回転と、いわゆる座標系の回転は無関係です。rot $\mathbb{U}$をcurl $\mathbb{U}$と記すこともあります。grad, div, rotは、.3),.4),.5)の右側の式からも分かるように∇を用いなくとも定義できます。それにもかかわらず∇を導入し、∇によってgrad, div, rotを定義したのは、grad, div, rotは、これらを組み合わせた演算(Successive Operation)で閉じていないからです。どうしても∇を用いないと表現できない量が出現するのです。rotで反対称単位テンソル$\varepsilon_{ik\ell}$が登場しますから、微分演算の諸恒等式の証明ではやはり(20.2)が大きな役割を果たします。

内積, 外積, grad, rot, div, ∇, ∇^2に関する、これから呈示, 証明しようとしている諸恒等式が、**数学的, 物理学的に有用, 有意義**でなければ、むなしいことですね。有用, 有意義ということばは主感的ではありますが、少なくとも、これらから構成される演算が**正規直行座標系の回転**によって不変でなければならないことについては貴方も同意してくれるでしょう。座標系の回転は、実は内積を不変にする連続線形変換として定義されます。座標系の回転はいわゆるLie群と呼ばれる連続群を成します。これについては主題をあらためて議論することにします。外積, ∇, ∇^2, grad, rot, divたちの座標の変換における振る舞いについては、座標系の回転の議論の中で、あるいはその後で論じることにしたいと思っています。

物理学的に有用, 有意議であることを示すためには、φ, $\mathbb{U}$は時間tの関数でもあるとし、これらを含む諸演算のローレンツ変換(Lorentz Transformation)における振る舞いを論じる必要が有ります。

ローレンツ変換と3次元の回転は、数学的には4次元の座標系の回転の部分群とほとんど同じです。ですから、4次元の直交座標系の回転について議

論する予定です。

内積と外積の緒恒等式を呈示する前に、下記の約束が必要です。

A，θ を下図のように約束します。

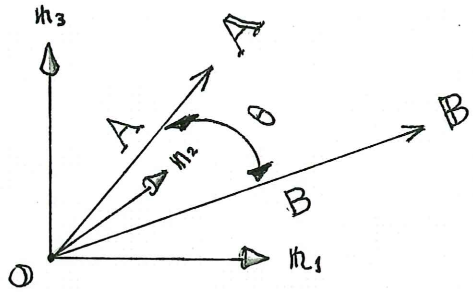


fig.131

$A = \sqrt{\mathbb{A}\cdot\mathbb{A}}$，$B = \sqrt{\mathbb{B}\cdot\mathbb{B}}$． θ は、$\mathbb{A}$ と $\mathbb{B}$ の成す角度のうち π を超えない方の角度（Angle）とします。

約束(51)

上図で $\mathbb{n}_1$，$\mathbb{n}_2$，$\mathbb{n}_3$ は与えられた正規直交座標系の単位ベクトルです。$\mathbb{O}$ は原点（Origin）です。

内積，外積に関する緒恒等式の呈示と証明を行いましょう。

内積，外積の恒等式

$$\mathbb{A}\cdot\mathbb{B} = \mathbb{B}\cdot\mathbb{A} \quad .1)$$

$$(\alpha\mathbb{A})\cdot\mathbb{B} = \alpha(\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}) \quad .2)$$

$$\mathbb{C}\cdot(\mathbb{A}+\mathbb{B}) = \mathbb{C}\cdot\mathbb{A} + \mathbb{C}\cdot\mathbb{B} \quad .3)$$

$$\mathbb{A}\cdot\mathbb{B} = AB\cos\theta \quad .4)$$

$$\mathbb{A}\times\mathbb{B} = -\mathbb{B}\times\mathbb{A} \quad .5)$$

（次ページへ続く）

$$(\alpha \mathbb{A}) \times \mathbb{B} = \alpha (\mathbb{A} \times \mathbb{B}) \quad .6)$$

$$\mathbb{C} \times (\mathbb{A} + \mathbb{B}) = \mathbb{C} \times \mathbb{A} + \mathbb{C} \times \mathbb{B} \quad .7)$$

$$[\mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{C}] = [\mathbb{B}\mathbb{C}\mathbb{A}] = [\mathbb{C}\mathbb{A}\mathbb{B}] \quad .8)$$

$$[\mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{C}] = -[\mathbb{A}\mathbb{C}\mathbb{B}] \quad .9)$$

$$[\mathbb{A}\mathbb{A}\mathbb{B}] = \mathbb{0} \quad .10)$$

$$\mathbb{A} \times (\mathbb{B} \times \mathbb{C}) = (\mathbb{A} \cdot \mathbb{C})\mathbb{B} - (\mathbb{A} \cdot \mathbb{B})\mathbb{C} \quad .11)$$

$$(\mathbb{A} \times \mathbb{B}) \cdot (\mathbb{C} \times \mathbb{D}) = (\mathbb{A} \cdot \mathbb{C})(\mathbb{B} \cdot \mathbb{D}) - (\mathbb{A} \cdot \mathbb{D})(\mathbb{B} \cdot \mathbb{C}) \quad .12)$$

$$\begin{aligned}(\mathbb{A} \times \mathbb{B}) \times (\mathbb{C} \times \mathbb{D}) &= [\mathbb{A}\mathbb{C}\mathbb{D}]\mathbb{B} - [\mathbb{B}\mathbb{C}\mathbb{D}]\mathbb{A} \\ &= [\mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{D}]\mathbb{C} - [\mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{C}]\mathbb{D} \quad .13)\end{aligned}$$

$$[\mathbb{B}\mathbb{C}\mathbb{D}]\mathbb{A} + [\mathbb{C}\mathbb{A}\mathbb{D}]\mathbb{B} + [\mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{D}]\mathbb{C} = [\mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{C}]\mathbb{D} \quad .14)$$

$$(\mathbb{A} \times \mathbb{B}) \cdot (\mathbb{A} \times \mathbb{B}) = (AB\sin\theta)^2 \quad .15)$$

$$[\mathbb{A} \times \mathbb{B} \;\; \mathbb{B} \times \mathbb{C} \;\; \mathbb{C} \times \mathbb{A}] = [\mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{C}]^2 \quad .16)$$

$\mathbb{A} \times (\mathbb{B} \times \mathbb{C})$ をベクトル３重積（Triple Vector Product）と呼びます。.8）は Heaviside の関係式と呼ばれています。

定理（52）

証明）

.1)

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = A_i B_i = B_i A_i = \mathbb{B} \cdot \mathbb{A}$$

.2)

$$(\alpha \mathbb{A}) \cdot \mathbb{B} = (\alpha A_i) B_i = \alpha (A_i B_i) = \alpha (\mathbb{A} \cdot \mathbb{B})$$

.3)

$$\mathbb{C}\cdot(\mathbb{A}+\mathbb{B}) = C_i(A_i+B_i)$$
$$= C_iA_i + C_iB_i = \mathbb{C}\cdot\mathbb{A} + \mathbb{C}\cdot\mathbb{B}$$

.4) P164で、内積は 任意の正規直交座標系の回転に対して不変だと述べましたね。このことを証明しようとすると自家撞着に陥ります。内積を不変にする連続線形変換として回転が定義されるからです。

任意に与えられた3次元正規直交座標系，及びその座標系で表現された任意の2つのベクトル $\mathbb{A}$，$\mathbb{B}$ に対して、適当(適切)な座標系の回転を施すことによって、$\mathbb{A}$，$\mathbb{B}$ を次のように表わすことが出来ます。(下図参照)。

$$\mathbb{A} = {}^t(A\ 0\ 0),\quad \mathbb{B} = {}^t(B_1 . B_2\ \ 0),\ B_2 \geq 0 \qquad (W1)$$

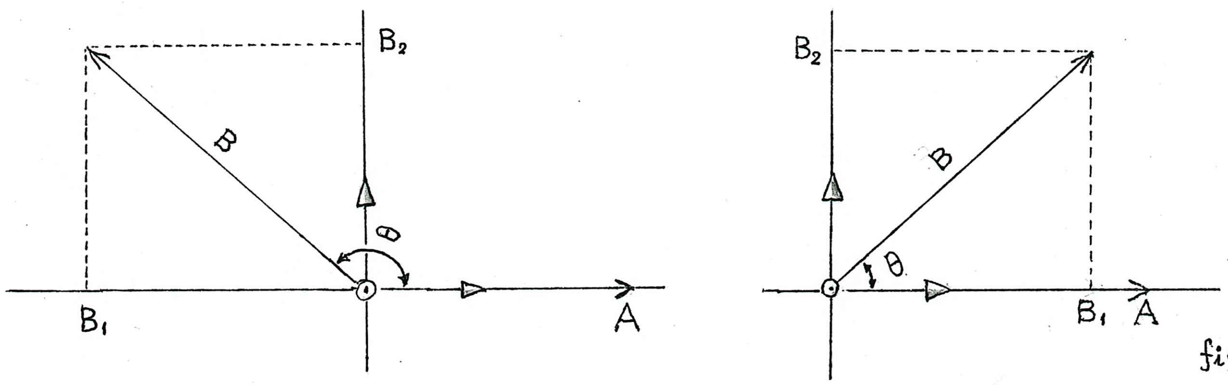


fig. 132

従って(W1)より、一般性を損うこと無く、

$$\mathbb{A}\cdot\mathbb{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 = AB_1 + 0B_2 + 00$$
$$= AB_1$$
$$= AB\cos\theta$$

.5)

$$\mathbb{A}\times\mathbb{B}\Big|_i = \varepsilon_{ik\ell}A_kB_\ell = \varepsilon_{ik\ell}B_\ell A_k$$
$$= -\varepsilon_{i\ell k}B_\ell A_k$$
$$= -\mathbb{B}\times\mathbb{A}\Big|_i$$

ここで $\varepsilon_{ik\ell}$ の反対称性 $\varepsilon_{ik\ell} = -\varepsilon_{i\ell k}$ を用いました。

.6)

$$(\alpha\mathbb{A})\times\mathbb{B}\big|_i = \varepsilon_{ikl}(\alpha A_k)B_l$$
$$= \alpha(\varepsilon_{ikl}A_kB_l) = \alpha(\mathbb{A}\times\mathbb{B}\big|_i)$$

.7)

$$\mathbb{C}\times(\mathbb{A}+\mathbb{B})\big|_i = \varepsilon_{ikl}C_k(A_l+B_l)$$
$$= \varepsilon_{ikl}C_kA_l + \varepsilon_{ikl}C_kB_l = \mathbb{C}\times\mathbb{A}\big|_i + \mathbb{C}\times\mathbb{B}\big|_i$$

.8)

$$[\mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{C}] = \mathbb{A}\cdot(\mathbb{B}\times\mathbb{C}) = A_i\,\varepsilon_{ikl}B_kC_l = \varepsilon_{ikl}A_iB_kC_l$$
$$[\mathbb{B}\mathbb{C}\mathbb{A}] = \mathbb{B}\cdot(\mathbb{C}\times\mathbb{A}) = B_i\,\varepsilon_{ikl}C_kA_l = \varepsilon_{ikl}A_lB_iC_k$$
$$= \varepsilon_{lik}A_lB_iC_k$$
$$[\mathbb{C}\mathbb{A}\mathbb{B}] = \mathbb{C}\cdot(\mathbb{A}\times\mathbb{B}) = C_i\,\varepsilon_{ikl}A_kB_l = \varepsilon_{ikl}A_kB_lC_i$$
$$= \varepsilon_{kli}A_kB_lC_i$$

ここで、 $\varepsilon_{ikl} = \varepsilon_{lik} = \varepsilon_{kli}$ を用いました。 ε の3個のダミー添字とA，B，Cの3個のダミー添字の対応関係に注目すれば

$$\varepsilon_{ikl}A_iB_kC_l = \varepsilon_{lik}A_lB_iC_k = \varepsilon_{kli}A_kB_lC_i$$

従って、

$$[\mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{C}] = [\mathbb{B}\mathbb{C}\mathbb{A}] = [\mathbb{C}\mathbb{A}\mathbb{B}]$$

.9)

$$[\mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{C}] = \varepsilon_{ikl}A_iB_kC_l = \varepsilon_{ikl}A_iC_lB_k$$
$$= -\varepsilon_{ilk}A_iC_lB_k = -[\mathbb{A}\mathbb{C}\mathbb{B}]$$

ここで $\varepsilon_{ikl} = -\varepsilon_{ilk}$ を用いました。

（次ページへ続く）

【P169】12月1日(火) 3次元のベクトル解析(続き)

.10)

$$[\mathbb{A}\mathbb{A}\mathbb{B}] = \varepsilon_{ik\ell}A_iA_kB_\ell = -\varepsilon_{ki\ell}A_kA_iB_\ell = -[\mathbb{A}\mathbb{A}\mathbb{B}]$$

$\varepsilon_{ik\ell}$を用いないで、Grassmann記号だけで、.8), .9)を用いて証明することも出来ます。やってみましょう。

$$[\mathbb{A}\mathbb{A}\mathbb{B}] = -[\mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{A}] = -[\mathbb{A}\mathbb{A}\mathbb{B}]$$

.11)

$$\begin{aligned}\mathbb{A}\times(\mathbb{B}\times\mathbb{C})|_i &= \varepsilon_{ijk}A_j\varepsilon_{k\ell m}B_\ell C_m \\ &= \varepsilon_{kij}\varepsilon_{k\ell m}A_jB_\ell C_m \\ &= (\delta_{i\ell}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{j\ell})A_jB_\ell C_m \\ &= A_jB_iC_j - A_jB_jC_i \\ &= (A_jC_j)B_i-(A_jB_j)C_i = (\mathbb{A}\cdot\mathbb{C})B_i-(\mathbb{A}\cdot\mathbb{B})C_i\end{aligned}$$

.12)

$$\begin{aligned}(\mathbb{A}\times\mathbb{B})\cdot(\mathbb{C}\times\mathbb{D}) &= \varepsilon_{ijk}A_jB_k\varepsilon_{i\ell m}C_\ell D_m \\ &= (\delta_{j\ell}\delta_{km}-\delta_{jm}\delta_{k\ell})A_jB_kC_\ell D_m \\ &= A_jB_kC_jD_k - A_jB_kC_kD_j \\ &= (A_jC_j)(B_kD_k)-(A_jD_j)(B_kC_k) \\ &= (\mathbb{A}\cdot\mathbb{C})(\mathbb{B}\cdot\mathbb{D})-(\mathbb{A}\cdot\mathbb{D})(\mathbb{B}\cdot\mathbb{C})\end{aligned}$$

.13)

$$\begin{aligned}(\mathbb{A}\times\mathbb{B})\times(\mathbb{C}\times\mathbb{D}) &= -(\mathbb{C}\times\mathbb{D})\times(\mathbb{A}\times\mathbb{B}) \\ &= -((\mathbb{C}\times\mathbb{D})\cdot\mathbb{B})\mathbb{A}+((\mathbb{C}\times\mathbb{D})\cdot\mathbb{A})\mathbb{B} \\ &= [\mathbb{A}\mathbb{C}\mathbb{D}]\mathbb{B}-[\mathbb{B}\mathbb{C}\mathbb{D}]\mathbb{A}\end{aligned}$$

(次ページへ続く)

$$(\mathbb{A}\times\mathbb{B})\times(\mathbb{C}\times\mathbb{D}) = ((\mathbb{A}\times\mathbb{B})\cdot\mathbb{D})\mathbb{C} - ((\mathbb{A}\times\mathbb{B})\cdot\mathbb{C})\mathbb{D}$$
$$= [\mathbb{D}\mathbb{A}\mathbb{B}]\mathbb{C} - [\mathbb{C}\mathbb{A}\mathbb{B}]\mathbb{D}$$
$$= [\mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{D}]\mathbb{C} - [\mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{C}]\mathbb{D}$$

.14)　.13)の右辺の2式を引けば良い。

$$[\mathbb{A}\mathbb{C}\mathbb{D}]\mathbb{B} - [\mathbb{B}\mathbb{C}\mathbb{D}]\mathbb{A} - [\mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{D}]\mathbb{C} + [\mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{C}]\mathbb{D} = \mathbb{O}$$

$$[\mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{C}]\mathbb{D} = [\mathbb{B}\mathbb{C}\mathbb{D}]\mathbb{A} + [\mathbb{C}\mathbb{A}\mathbb{D}]\mathbb{B} + [\mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{D}]\mathbb{C}$$

.15)　.12)において $\mathbb{C}=\mathbb{A}$, $\mathbb{D}=\mathbb{B}$ とし、さらに、.4)を用いれば良い。

$$(\mathbb{A}\times\mathbb{B})\cdot(\mathbb{A}\times\mathbb{B}) = (\mathbb{A}\cdot\mathbb{A})(\mathbb{B}\cdot\mathbb{B}) - (\mathbb{A}\cdot\mathbb{B})(\mathbb{B}\cdot\mathbb{A})$$
$$= A^2B^2 - (\mathbb{A}\cdot\mathbb{B})^2$$
$$= A^2B^2 - (AB\cos\theta)^2 = (AB\sin\theta)^2$$

θに関する約束(51)より $0\leq\theta\leq\pi$ だから $\sin\theta\geq 0$ です。従って、.15)は次のようにも表わされます。

$$|\mathbb{A}\times\mathbb{B}| = AB\sin\theta \qquad \text{定理}(52.15)'$$

.16)

$$[\mathbb{A}\times\mathbb{B}\ \ \mathbb{B}\times\mathbb{C}\ \ \mathbb{C}\times\mathbb{A}] = (\mathbb{A}\times\mathbb{B})\cdot((\mathbb{B}\times\mathbb{C})\times(\mathbb{C}\times\mathbb{A}))$$
$$= (\mathbb{A}\times\mathbb{B})\cdot([\mathbb{B}\mathbb{C}\mathbb{A}]\mathbb{C} - [\mathbb{C}\mathbb{C}\mathbb{A}]\mathbb{B})$$
$$= (\mathbb{A}\times\mathbb{B})\cdot([\mathbb{B}\mathbb{C}\mathbb{A}]\mathbb{C})$$
$$= [\mathbb{B}\mathbb{C}\mathbb{A}]((\mathbb{A}\times\mathbb{B})\cdot\mathbb{C})$$
$$= [\mathbb{B}\mathbb{C}\mathbb{A}][\mathbb{C}\mathbb{A}\mathbb{B}]$$
$$= [\mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{C}][\mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{C}]$$
$$= [\mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{C}]^2$$

Q.E.D

【P171】 3次元のベクトル解析（続き）

微分演算子 grad, rot, div に関する緒恒等式の呈示と証明を行いましょう。これらの演算子が線形演算子であることは自明ですから、定理（52）で掲げた .2)，.3)，.6)，.7) に対応する等式は呈示しないことにします。

grad, rot, div に関する恒等式

$$\mathrm{grad}(\mathbb{U}\cdot\mathbb{W}) = \mathbb{U}\times\mathrm{rot}\,\mathbb{W} + \mathbb{W}\times\mathrm{rot}\,\mathbb{U} + (\mathbb{U}\cdot\nabla)\mathbb{W} + (\mathbb{W}\cdot\nabla)\mathbb{U} \qquad .1)$$

$$\mathrm{rot}(\mathbb{U}\times\mathbb{W}) = (\mathrm{div}\,\mathbb{W})\mathbb{U} - (\mathrm{div}\,\mathbb{U})\mathbb{W} + (\mathbb{W}\cdot\nabla)\mathbb{U} - (\mathbb{U}\cdot\nabla)\mathbb{W} \qquad .2)$$

$$\mathrm{div}(\mathbb{U}\times\mathbb{W}) = \mathbb{W}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbb{U} - \mathbb{U}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbb{W} \qquad .3)$$

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\varphi) = \mathbb{O} \qquad .4)$$

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\mathbb{U}) = \mathbb{O} \qquad .5)$$

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\mathbb{U}) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\mathbb{U}) - \nabla^2\mathbb{U} \qquad .6)$$

定理（53）

証明）

.1)

$$\mathrm{grad}(\mathbb{U}\cdot\mathbb{W})\Big|_i = \frac{\partial}{\partial x_i}(U_j W_j) = W_j\frac{\partial U_j}{\partial x_i} + U_j\frac{\partial W_j}{\partial x_i} \qquad (W2)$$

この右辺の2つの項は、個別には ∇ と内積と外積では簡単には表現できそうには有りませんね。でも .1) の右辺よりは Simple ですね。そこでこれも公式として呈示しておくことにしましょう。

$$\mathrm{grad}(\mathbb{U}\cdot\mathbb{W})\Big|_i = W_j\frac{\partial U_j}{\partial x_i} + U_j\frac{\partial W_j}{\partial x_i} \qquad \text{定理(53.1)}$$

.1) の右辺の4項を個別に書き下しましょう。

$$\mathbb{U}\times \mathrm{rot}\,\mathbb{W}\Big|_i = \varepsilon_{ijk} U_j \varepsilon_{klm}\frac{\partial}{\partial x_l} W_m$$

$$= \varepsilon_{kij}\,\varepsilon_{klm}\,U_j\frac{\partial}{\partial x_l}W_m$$

$$= (\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})\,U_j\frac{\partial}{\partial x_l}W_m$$

$$= U_j\frac{\partial}{\partial x_i}W_j - U_j\frac{\partial}{\partial x_j}W_i \qquad \text{(W3)}$$

$$\mathbb{W}\times \mathrm{rot}\,\mathbb{U}\Big|_i = W_j\frac{\partial}{\partial x_i}U_j - W_j\frac{\partial}{\partial x_j}U_i \qquad \text{(W4)}$$

$$(\mathbb{U}\cdot\nabla)\mathbb{W}\Big|_i = U_j\frac{\partial}{\partial x_j}W_i \qquad \text{(W5)}$$

$$(\mathbb{W}\cdot\nabla)\mathbb{U}\Big|_i = W_j\frac{\partial}{\partial x_j}U_i \qquad \text{(W6)}$$

(W3), (W4), (W5), (W6), 及び (W2) より

$$\Big(\mathbb{U}\times\mathrm{rot}\,\mathbb{W} + \mathbb{W}\times\mathrm{rot}\,\mathbb{U} + (\mathbb{U}\cdot\nabla)\mathbb{W} + (\mathbb{W}\cdot\nabla)\mathbb{U}\Big)\Big|_i$$

$$= U_j\frac{\partial}{\partial x_i}W_j - U_j\frac{\partial}{\partial x_j}W_i$$

$$+ W_j\frac{\partial}{\partial x_i}U_j - W_j\frac{\partial}{\partial x_j}U_i$$

$$+ U_j\frac{\partial}{\partial x_j}W_i + W_j\frac{\partial}{\partial x_j}U_i$$

$$= W_j\frac{\partial}{\partial x_i}U_j + U_j\frac{\partial}{\partial x_i}W_j = \mathrm{grad}(\mathbb{U}\cdot\mathbb{W})\Big|_i$$

.2)

$$\mathrm{rot}(\mathbb{U}\times\mathbb{W})\Big|_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\varepsilon_{klm}U_l W_m$$

$$= (\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})\Big(W_m\frac{\partial}{\partial x_j}U_l + U_l\frac{\partial}{\partial x_j}W_m\Big)$$

$$= W_j\frac{\partial}{\partial x_j}U_i + U_i\frac{\partial}{\partial x_j}W_j - W_i\frac{\partial}{\partial x_j}U_j - U_j\frac{\partial}{\partial x_j}W_i$$

$$= (\mathbb{W}\cdot\nabla)U_i + U_i(\mathrm{div}\,\mathbb{W}) - W_i(\mathrm{div}\,\mathbb{U}) - (\mathbb{U}\cdot\nabla)W_i$$

$$= \Big((\mathrm{div}\,\mathbb{W}\ \ \mathbb{U} - (\mathrm{div}\,\mathbb{U})\mathbb{W} + (\mathbb{W}\cdot\nabla)\mathbb{U} - (\mathbb{U}\cdot\nabla)\mathbb{W}\Big)\Big|_i$$

【P173】3次元のベクトル解析（続き）

.3)

$$\mathrm{div}(\mathbb{U}\times\mathbb{W}) = \frac{\partial}{\partial x_i}\varepsilon_{ijk}U_jW_k$$

$$= \varepsilon_{ijk}\left(W_k\frac{\partial}{\partial x_i}U_j + U_j\frac{\partial}{\partial x_i}W_k\right)$$

$$= W_k\varepsilon_{kij}\frac{\partial}{\partial x_i}U_j - U_j\varepsilon_{jik}\frac{\partial}{\partial x_i}W_k$$

$$= W_k\,\mathrm{rot}\,\mathbb{U}\big|_k - U_j\,\mathrm{rot}\,\mathbb{W}\big|_j = \mathbb{W}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbb{U} - \mathbb{U}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbb{W}$$

.4)

$$(\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\varphi))\big|_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_k}\varphi$$

$$= -\varepsilon_{ikj}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi = -(\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\varphi))\big|_i$$

.5)

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\mathbb{U}) = \frac{\partial}{\partial x_i}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}U_k$$

$$= \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}U_k$$

$$= -\varepsilon_{jik}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}U_k$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x_j}\varepsilon_{jik}\frac{\partial}{\partial x_i}U_k = -\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\mathbb{U})$$

.6)

$$(\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\mathbb{U}))\big|_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\varepsilon_{klm}\frac{\partial}{\partial x_l}U_m$$

$$= \varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_l}U_m$$

$$= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_l}U_m$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}U_j - \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}U_i$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}U_j\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)U_i$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i}\mathrm{div}\,\mathbb{U} - \nabla^2 U_i$$

$$= (\mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\mathbb{U}) - \nabla\mathbb{U})\big|_i$$

Q.E.D.

定理(53)の6個の式で ∇, grad, rot, div, 内積, 外積に関する全ての演算が出尽くされているでしょうか? そうではありません。自明な演算が抜けています。自明とは云え重要な演算です。Shrödingerの波動方程式(Wave Equation)に現われるあの演算です。ここにそれも定理として呈示しておくことにしましょう

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,\varphi) = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi = \nabla^2\varphi \qquad \text{定理(54)}$$

『3次元のベクトル解析』については、今のところこれぐらいにしておくことにしよう。多くの課題(Subject, Theme)が残された。

正規直交座標系の定義もしないで、これを前題としてベクトル解析の諸恒等式を論じた。座標系の回転に対する、内積, 外積, grad, div, rot, ∇, ∇^2 等の振舞, 座標系の回転そのものの定義と表現, 内積, 外積, スカラー3重積等の幾何学意味付け、微分演算子の、直観的(Induitiv)なImageを与えてくれるような、幾何学的, 物理学的な解釈, また呈示した諸恒等式の有用性を示す具体的な応用(Practical Application)例(Examples)の紹介(Present), などなど。

そして何よりも重要な、残された課題は、ベクトルの積分に関するいくつかの定理

Gauss's Theorem, Stokes's Theorem

などである。

さらに, 3次元ではなく4次元, 5次元, … のベクトル解析を考えることが出来るとしたら、それらはどういうものなのか? 3次元の特殊性(Peculiarity)が見えてくるのかもしれません。例えば外積やrotは、実はベクトルではなく、反対称行列やテンソル(Tensor)として理解されるべき量なのかもしれません。

以上の諸課題については、Volumeがあるので、いくつかの主題として、後述するつもりです。

● 小休止：落書き Scrawl Scribbling

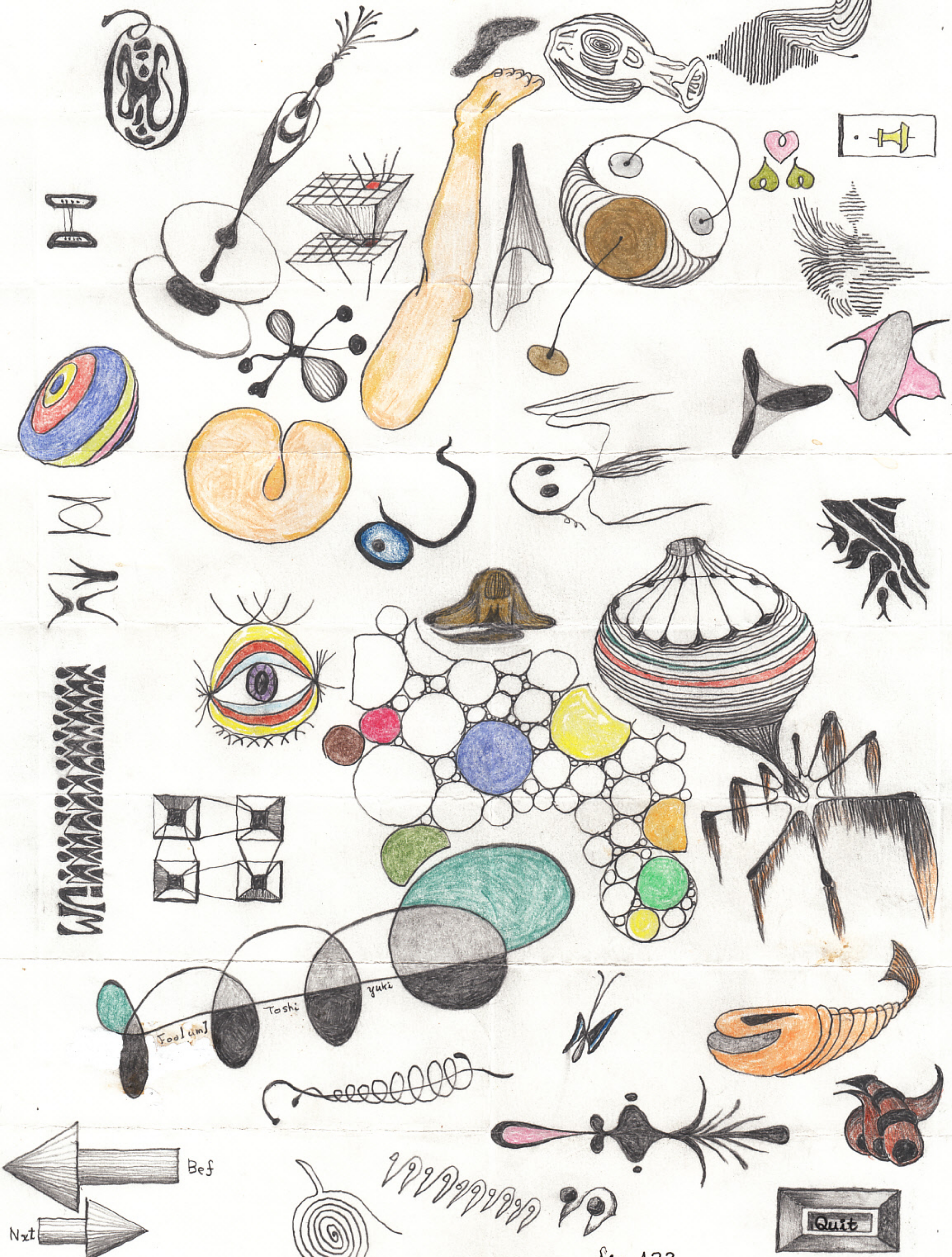


fig. 133