＜ 三角関数と双曲線関数の融合域（その６０）＞

ζ(3)の極限公式を新たに三つ見出したので下方に青色式で示す。なお、極限公式は多く出すぎたため、今回のものに関係ないグループは略した（ただし比較のため e^{π} 極限公式は示した）。ζ(3)グループは過去のものをすべて示した。

以降において、ζ(3)は次の通り。

$\zeta(3)=1+1/2^3+1/3^3+1/4^3+\cdot\cdot=$非明示

以降では、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。a は任意の実数である。$\tan^{-1}$, th^{-1} はそれぞれ arctan,arctanh である。log は自然対数、e は自然対数の底。sin, cos, tan は通常の表記である。

なお、lim での a->+0 は a をプラス側から 0 に近づける意味であり、a->±0 は a をプラス側,マイナス側どちらから 0 に近づけてもＯＫの意味である。

＝＝

＜ 極限公式 ＞

◆ζ(3)極限公式

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{16a^2}{7}\log\left(\frac{1}{\mathrm{th}2a\cdot\mathrm{th}^2 3a\cdot\mathrm{th}^3 4a\cdot\mathrm{th}^4 5a\cdots}\right)$$ ---＜S6－1＞

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm0}\frac{8a^4}{9}\left(\frac{2^3-2}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{3^3-3}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{4^3-4}{\mathrm{ch}^2 4a}+\frac{5^3-5}{\mathrm{ch}^2 5a}+\cdot\cdot\right)$$ ---＜S6－2＞

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm0}\frac{2a^4}{3}\left(\frac{2^3-2}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{3^3-3}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{4^3-4}{\mathrm{sh}^2 4a}+\frac{5^3-5}{\mathrm{sh}^2 5a}+\cdot\cdot\right)$$ ---＜S6－3＞

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm0}\frac{16a^3}{7}\left(\frac{1^2}{\mathrm{sh}2a}+\frac{2^2}{\mathrm{sh}4a}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}6a}+\frac{4^2}{\mathrm{sh}8a}+\cdot\cdot\right)$$ ----＜S6－4＞

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{16a^3}{3}\left(\frac{1^2}{e^{2a}+1}+\frac{2^2}{e^{4a}+1}+\frac{3^2}{e^{6a}+1}+\frac{4^2}{e^{8a}+1}+\cdot\cdot\right)$$ ----＜S6－5＞

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{8a^2}{3}\log\left((1+e^{-a})(1+e^{-3a})^3(1+e^{-5a})^5(1+e^{-7a})^7\cdot\cdot\right)$$ ---＜S6－6＞

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0} a^2\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-2a})^2(1-e^{-3a})^3(1-e^{-4a})^4\cdot\cdot}\right) \quad \text{---<S6-7>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{16a^2}{3}\log\left((1+e^{-2a})(1+e^{-4a})^2(1+e^{-6a})^3(1+e^{-8a})^4\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S6-8>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0} 2a^2\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-3a})^3(1-e^{-5a})^5(1-e^{-7a})^7\cdot\cdot}\right) \quad \text{---<S6-9>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{4a^3}{3}\left(\frac{1^2}{e^a+1}+\frac{3^2}{e^{3a}+1}+\frac{5^2}{e^{5a}+1}+\frac{7^2}{e^{7a}+1}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S6-10>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0} a^3\left(\frac{1^2}{e^a-1}+\frac{3^2}{e^{3a}-1}+\frac{5^2}{e^{5a}-1}+\frac{7^2}{e^{7a}-1}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S6-11>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm0}\frac{4a^3}{7}\left(\frac{1^2}{\mathrm{sh}a}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}3a}+\frac{5^2}{\mathrm{sh}5a}+\frac{7^2}{\mathrm{sh}7a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S6-12>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{16a^2}{7}\left(\mathrm{th}^{-1}(e^{-a})+3\mathrm{th}^{-1}(e^{-3a})+5\mathrm{th}^{-1}(e^{-5a})+7\mathrm{th}^{-1}(e^{-7a})+\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S6-13>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm0}\frac{8a^2}{7}\left(\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}a}\right)+3\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}3a}\right)+5\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}5a}\right)+7\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}7a}\right)+\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S6-14>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm0}\frac{4a^4}{3}\left(\frac{3^3-3}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{5^3-5}{\mathrm{sh}^2 5a}+\frac{7^3-7}{\mathrm{sh}^2 7a}+\frac{9^3-9}{\mathrm{sh}^2 9a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S6-15>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{8a^2}{3}\log\left(2(1+e^{-2a})^3(1+e^{-4a})^5(1+e^{-6a})^7\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S6-16>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{8a^2}{3}\log\left((1+e^{-2a})(1+e^{-4a})^3(1+e^{-6a})^5(1+e^{-8a})^7\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S6-17>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{8a^2}{3}\log\left((1+e^{a})(1+e^{-a})^3(1+e^{-3a})^5(1+e^{-5a})^7\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S6-18>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{8a^2}{3}\log\left((1+e^{-3a})(1+e^{-5a})^3(1+e^{-7a})^5(1+e^{-9a})^7\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S6-19>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{16a^2}{3}\log\left((1+e^{-a})(1+e^{-3a})^2(1+e^{-5a})^3(1+e^{-7a})^4\cdot\cdot\right)$$
---<S6−20>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{16a^2}{3}\log\left((1+e^{-3a})(1+e^{-5a})^2(1+e^{-7a})^3(1+e^{-9a})^4\cdot\cdot\right)$$
---<S6−21>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{16a^2}{3}\log(2(1+e^{-2a})^2(1+e^{-4a})^3(1+e^{-6a})^4(1+e^{-8a})^5\cdot\cdot)$$
---<S6−22>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{16a^2}{3}\log\left((1+e^{a})(1+e^{-a})^2(1+e^{-3a})^3(1+e^{-5a})^4\cdot\cdot\right)$$
---<S6−23>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm0}\frac{8a^4}{9}\left(\frac{1^3}{ch^2a}+\frac{2^3}{ch^22a}+\frac{3^3}{ch^23a}+\frac{4^3}{ch^24a}+\cdot\cdot\right)$$
----<S6−24>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm0}\frac{2a^4}{3}\left(\frac{1^3}{sh^2a}+\frac{2^3}{sh^22a}+\frac{3^3}{sh^23a}+\frac{4^3}{sh^24a}+\cdot\cdot\right)$$
----<S6−25>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{a^3}{2}\left(\frac{1^2}{e^{a}-1}+\frac{2^2}{e^{2a}-1}+\frac{3^2}{e^{3a}-1}+\frac{4^2}{e^{4a}-1}+\cdot\cdot\right)$$
----<S6−26>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm0}\frac{2a^4}{21}\left(\frac{3\times2\times1ch4a}{sh^24a}+\frac{4\times3\times2ch5a}{sh^25a}+\frac{5\times4\times3ch6a}{sh^26a}+\frac{6\times5\times4ch7a}{sh^27a}+\cdot\cdot\right)$$
-----<S6−27>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}a^2\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-2a})(1-e^{-3a})^2(1-e^{-4a})^3(1-e^{-5a})^4\cdot\cdot}\right)$$
---<S6−28>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}2a^3\left(2\times1\left(\frac{1}{th3a}-1\right)+3\times2\left(\frac{1}{th4a}-1\right)+4\times3\left(\frac{1}{th5a}-1\right)+5\times4\left(\frac{1}{th6a}-1\right)+\cdot\cdot\right)$$
--<S6−２９>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{8a^3}{3}(2\times1(1-th3a)+3\times2(1-th4a)+4\times3(1-th5a)+5\times4(1-th6a)+\cdot\cdot)$$
--<S6−３０>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm0}\frac{4a^2}{7}\log\left(\left(\frac{cha+\cos a}{cha-\cos a}\right)\left(\frac{ch3a+\cos a}{ch3a-\cos a}\right)^3\left(\frac{ch5a+\cos a}{ch5a-\cos a}\right)^5\left(\frac{ch7a+\cos a}{ch7a-\cos a}\right)^7\cdot\cdot\right)$$
--<S6−31>

◆ e^{π}極限公式

$$e^{\pi}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{cha+\sin a}{cha-\sin a}\right)\left(\frac{ch2a+\sin a}{ch2a-\sin a}\right)\left(\frac{ch3a+\sin a}{ch3a-\sin a}\right)\left(\frac{ch4a+\sin a}{ch4a-\sin a}\right)\cdot\cdot$$
--<S8−1>

$$e^{\pi}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin a}{\mathrm{ch}a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin a}{\mathrm{ch}3a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}5a+\sin a}{\mathrm{ch}5a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}7a+\sin a}{\mathrm{ch}7a-\sin a}\right)^2\cdot\cdot \quad \text{--<S8-2>}$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

上記の三つの青色式が得られた。Wolfram Alpha での数値検証でも式の成立を確認している。

三つの中で最も興味ある形をしているのは、次であろう。

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm0}\frac{4a^2}{7}\log\left(\left(\frac{\mathrm{ch}a+\cos a}{\mathrm{ch}a-\cos a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\cos a}{\mathrm{ch}3a-\cos a}\right)^3\left(\frac{\mathrm{ch}5a+\cos a}{\mathrm{ch}5a-\cos a}\right)^5\left(\frac{\mathrm{ch}7a+\cos a}{\mathrm{ch}7a-\cos a}\right)^7\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S6-31>}$$

この式の証明を以下に示す。詳細な式変形は飛ばした。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜S6－３１＞の証明

下式[1]の左辺から出発する。その左辺を１３年前のこちらの 2012/8/16 の[導出]と類似の方法を使って変形していくと[1]の右辺に到達する。途中でゼータの香りの漂う・・（その３８１）でのフーリエ級数の⑧を使う。（注意：フーリエ級数の表現を使っているが、それらは恒等式である）　下記[1]は三変数の恒等式となっている。

$$\cos x\left(\frac{\alpha\cdot\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a+\cos 2x}+\frac{\alpha^3\cdot\mathrm{ch}3a}{3(\mathrm{ch}6a+\cos 2x)}+\frac{\alpha^5\cdot\mathrm{ch}5a}{5(\mathrm{ch}10a+\cos 2x)}+\frac{\alpha^7\cdot\mathrm{ch}7a}{7(\mathrm{ch}14a+\cos 2x)}+\cdot\cdot\right)$$

$$=\cos x\left(\frac{\alpha}{e^a}+\frac{\alpha^3}{3e^{3a}}+\frac{\alpha^5}{5e^{5a}}+\cdot\cdot\right)-\cos 3x\left(\frac{\alpha}{e^{3a}}+\frac{\alpha^3}{3e^{9a}}+\frac{\alpha^5}{5e^{15a}}+\cdot\cdot\right)+\cos 5x\left(\frac{\alpha}{e^{5a}}+\frac{\alpha^3}{3e^{15a}}+\frac{\alpha^5}{5e^{25a}}+\cdot\cdot\right)-\cos 7x\left(\frac{\alpha}{e^{7a}}+\frac{\alpha^3}{3e^{21a}}+\frac{\alpha^5}{5e^{35a}}+\cdot\cdot\right)+-\cdot\cdot$$

----[1]

($a>0$、$|\alpha|<e^a$, x は任意実数)

上式で $\alpha=e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\cdot\sin\alpha$（i：虚数単位）と置き、整理して実部、虚部に対応する, cos 級数式と sin 級数式に分けてから、cos 級数式の方に着目して、ゼータの香りの漂う・・（その３８１）でのフーリエ級数の[7]をその cos 級数式に対して使い、変形していくと次式に達する。

$$\cos x\left(\left(\frac{\cos\alpha}{1}\right)\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a+\cos 2x}+\left(\frac{\cos 3\alpha}{3}\right)\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{ch}6a+\cos 2x}+\left(\frac{\cos 5\alpha}{5}\right)\frac{\mathrm{ch}5a}{\mathrm{ch}10a+\cos 2x}+\left(\frac{\cos 7\alpha}{7}\right)\frac{\mathrm{ch}7a}{\mathrm{ch}14a+\cos 2x}+\cdot\cdot\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos x\cdot\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\cos\alpha}{\mathrm{ch}a}\right)-\cos 3x\cdot\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\cos\alpha}{\mathrm{ch}3a}\right)+\cos 5x\cdot\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\cos\alpha}{\mathrm{ch}5a}\right)-\cos 7x\cdot\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\cos\alpha}{\mathrm{ch}7a}\right)+-\cdot\cdot\right) \quad \text{---[2]}$$

(a は 0 でない実数、x と α は任意実数)

上式の両辺に 1/cosx を掛けてから（右辺は各項に掛ける）、x をπ/2 に限りなく近づけていき、右辺にはロピタルの定理を適用すると、次となる。

$$\left(\frac{\cos\alpha}{1}\right)\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a-1}+\left(\frac{\cos 3\alpha}{3}\right)\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{ch}6a-1}+\left(\frac{\cos 5\alpha}{5}\right)\frac{\mathrm{ch}5a}{\mathrm{ch}10a-1}+\left(\frac{\cos 7\alpha}{7}\right)\frac{\mathrm{ch}7a}{\mathrm{ch}14a-1}+\cdot\cdot$$

$$=\frac{1}{2}\left(1\cdot\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\cos\alpha}{\mathrm{ch}a}\right)+3\cdot\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\cos\alpha}{\mathrm{ch}3a}\right)+5\cdot\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\cos\alpha}{\mathrm{ch}5a}\right)+7\cdot\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\cos\alpha}{\mathrm{ch}7a}\right)+\cdot\cdot\right)\qquad ---[2]-2$$

(a は 0 でない実数、α は任意実数)

上式に対しα＝a としα をa と置く、公式集にある公式 $\mathrm{th}^{-1}(B/A)=(1/2)\log((A+B)/(A-B))$（ただし $|B/A|<1$）も利用して上式を変形すると、次となる。

$$\left(\frac{\cos a}{1}\right)\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a-1}+\left(\frac{\cos 3a}{3}\right)\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{ch}6a-1}+\left(\frac{\cos 5a}{5}\right)\frac{\mathrm{ch}5a}{\mathrm{ch}10a-1}+\left(\frac{\cos 7a}{7}\right)\frac{\mathrm{ch}7a}{\mathrm{ch}14a-1}+\cdot\cdot$$

$$=\frac{1}{4}\left(1\cdot\log\left(\frac{\mathrm{ch}a+\cos a}{\mathrm{ch}a-\cos a}\right)+3\cdot\log\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\cos a}{\mathrm{ch}3a-\cos a}\right)+5\cdot\log\left(\frac{\mathrm{ch}5a+\cos a}{\mathrm{ch}5a-\cos a}\right)+7\cdot\log\left(\frac{\mathrm{ch}7a+\cos a}{\mathrm{ch}7a-\cos a}\right)+\cdot\cdot\right)\qquad ---[2]-3$$

(a は 0 でない実数)

さらに上式の両辺に a^2 を掛け（左辺は各項に掛ける)、a を限りなく 0 に近づけていくと、左辺にはロピタルの定理が適用できて、左辺は結局 $(1+1/3^3+1/5^3+1/7^3+\cdot\cdot)/2=\{7\zeta(3)/8\}/2=7\zeta(3)/16$ となり、右辺も整理して、目的の<S6－31>に到達する。

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm 0}\frac{4a^2}{7}\log\left(\left(\frac{\mathrm{ch}a+\cos a}{\mathrm{ch}a-\cos a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\cos a}{\mathrm{ch}3a-\cos a}\right)^3\left(\frac{\mathrm{ch}5a+\cos a}{\mathrm{ch}5a-\cos a}\right)^5\left(\frac{\mathrm{ch}7a+\cos a}{\mathrm{ch}7a-\cos a}\right)^7\cdot\cdot\right)\qquad --<S6-31>$$

終わり。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このようにして<S6－31>が得られた。ポイントは、[2]や[2]-3 の両辺にわざわざ 1/cosx や a^2 を掛ける点である。

さらには、[2]-2 に対しα＝a(α を a と置く)とした点にも注意したい。この操作自体は簡単この上ないが、数学的には奥深いものが絡んでおり、説明すると長くなるが少し説明する。

任意の実数 a を全ての定数点 a1, a2, a3, ・・(非加算個ある！！）に分断して一つ一つ見ていくという形をとる。次のようにする。

a が a1 のとき成り立つ式[2]-2 においてその a1 をαにも入れ成り立つ式を式 1（数＝数）とする。
次に a が(a1 の隣の)a2 のとき成り立つ式[2]-2 においてその a2 をαにも入れ成り立つ式を式 2（数＝数）とする。
次に a が(a2 の隣の)a3 のとき成り立つ式[2]-2 においてその a3 をαにも入れ成り立つ式を式 3（数＝数）とする。
次に、・・
と同様の操作を全ての実数点 a1, a2, a3, ・・に対して無限個（非加算個）の回数行い、それらで成り立つ式 1, 式 2, 式 3, ・・(非加算個ある）の数＝数を、左右それぞれで（曲線を作るように）繋いでいって再構成した式が[2]-3 である。

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●すぐ上で述べた非加算個の操作は、空想の中ではすぐにできるのだが言葉で述べればややこしいことこの上ない。それは無限を相手にするので、実際は神様か悪魔しかできない操作になるが、ピンセットで細かい粒を一粒一粒拾いあげてはそれらを延々と繋いでいって一から作り直すという操作であり、気が遠くなる。そんな

気が遠くなることが、“αをａとおく”という中学生にもできる簡単な置き換えの中に潜んでいることは覚えておくべきことといえる。

●証明中の[2]は三変数の恒等式だが、これは三角関数と双曲線関数の融合域の三変数域における母等式の一つである。一つ上で述べたα＝a という操作ができるのも、パラメータの多い三変数域だからできるのであって、二変数域ではちょっと無理である。パラメータの多い世界は自由度が高く組み合わせが無限にあり、多くの素材を使ってさまざまなデザインが作れるので必然的に豊かなことになる。

●よく観ると、示した証明はなにかぎくしゃくしている。証明の前半部分は１年以上前の式導出の結果をそっくりそのまま使ったからなのだが、今の視点で見ると、もう少しすっきりと（形式的に途中で虚数ｉなど出さずに）目的地に到達できると思う。１年半ほど前にはじめて三変数域に入った。はじめて入った森はわからないことだらけで手探りで進んでいくので、あとから振り返るととても遠回りして目的地に到達していることが非常に多い。しかしそれは仕方ないことで、森の全容を知るにはそこら中を走り回らないことにはまったくわからない。走り回るうちにだんだんとわかってくるのだが、なんでも試行錯誤(or 実験)であって、それがものを創る上で一番面白いことである。

●次の三式を比べよう。

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm0}\frac{4a^2}{7}\log\left(\left(\frac{\mathrm{ch}a+\cos a}{\mathrm{ch}a-\cos a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\cos a}{\mathrm{ch}3a-\cos a}\right)^3\left(\frac{\mathrm{ch}5a+\cos a}{\mathrm{ch}5a-\cos a}\right)^5\left(\frac{\mathrm{ch}7a+\cos a}{\mathrm{ch}7a-\cos a}\right)^7\cdot\cdot\right)\quad\text{--<S6-31>}$$

$$e^{\pi}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin a}{\mathrm{ch}a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\sin a}{\mathrm{ch}2a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin a}{\mathrm{ch}3a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\sin a}{\mathrm{ch}4a-\sin a}\right)\cdot\cdot\quad\text{--<S8-1>}$$

$$e^{\pi}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin a}{\mathrm{ch}a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin a}{\mathrm{ch}3a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}5a+\sin a}{\mathrm{ch}5a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}7a+\sin a}{\mathrm{ch}7a-\sin a}\right)^2\cdot\cdot\quad\text{--<S8-2>}$$

これらはやっぱりよい！ 眺めるだけで幽玄の世界に遊んでいるような気になる。

右辺は、テータ関数（可積分系とコマ（その１７））の発展版、進化系が出ていると思う。＜Ｓ８－１＞、＜Ｓ８－２＞は log もないし最初にかかる a^n もなく、シンプルでふしぎであり、私が気に入っている式である。ただし、深みという点においては＜Ｓ６－３１＞の log 内の$()()^3()^5$・・の方が深いと思う。

＝＝

2025.12.27 杉岡幹生

sugioka_m@mvb.biglobe.ne.jp

＜参考文献＞

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)

・「数学公式Ⅱ」(森口・宇田川・一松、岩波書店)

・可積分系とコマ（その１７）