＜ 三角関数と双曲線関数の融合域（その５９）＞

$\pi^2/8$ に関する不等式の定理の二つ目、$\pi^2/6$ に関する不等式の定理の三つ目を見出したので報告したい。それぞれ$\pi^2/8$ 不等式-定理 2、$\pi^2/6$ 不等式-定理 3 と名付け、下方に青字で示した。それは極限公式とも関係しているため、まず先に過去に出した$\pi^2/8$ 極限公式と$\pi^2/6$ 極限公式を全て列挙し、次に発見した定理を示す。なお、例えばこちらで示した＜Ｓ３－１２＞はより簡明な形に同値変形できたので、下方で茶色で示した。

また、$\pi^2/8$ とζ(2)つまり$\pi^2/6$ の関係は次の通りとなる。

$\zeta(2)=1+1/2^2+1/3^2+1/4^2+\cdots=\pi^2/6$

$(3/4)\zeta(2)=1+1/3^2+1/5^2+1/7^2+\cdots=\pi^2/8$（一つ上と実質は同じ）

以下では、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。a は任意の実数である。$\tan^{-1}$, th^{-1} はそれぞれ arctan, arctanh である。log は自然対数、e は自然対数の底。sin, cos, tan は通常の表記である。

なお、lim での a->+0 は a をプラス側から 0 に近づける意味である。

==

◆$\dfrac{\pi^2}{8}$極限公式 (3ζ(2)/4 極限公式)

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} a\cdot\log\left(\frac{1}{\mathrm{tha}\cdot\mathrm{th2a}\cdot\mathrm{th3a}\cdot\mathrm{th4a}\cdot\mathrm{th5a}\cdots}\right)\qquad \text{----<S2-1>}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} 2a\cdot\log\left(\frac{1}{\mathrm{tha}\cdot\mathrm{th3a}\cdot\mathrm{th5a}\cdot\mathrm{th7a}\cdot\mathrm{tha9a}\cdots}\right)\qquad \text{----<S2-2>}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} a^2\left(\frac{2}{\mathrm{sh2a}}+\frac{4}{\mathrm{sh4a}}+\frac{6}{\mathrm{sh6a}}+\frac{8}{\mathrm{sh8a}}+\cdots\right)\qquad \text{----<S2-3>}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} a^2\left(\frac{1}{\mathrm{sha}}+\frac{3}{\mathrm{sh3a}}+\frac{5}{\mathrm{sh5a}}+\frac{7}{\mathrm{sh7a}}+\cdots\right)\qquad \text{----<S2-4>}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{sh2a}}+\frac{2}{\mathrm{sh3a}}+\frac{3}{\mathrm{sh4a}}+\frac{4}{\mathrm{sh5a}}+\cdots\right)\qquad \text{----<S2-5>}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} a\cdot\log\left(\left(\frac{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch10a}+\mathrm{cha}}{\mathrm{ch10a}-\mathrm{cha}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch14a}+\mathrm{cha}}{\mathrm{ch14a}-\mathrm{cha}}\right)\cdots\right)\qquad \text{---<S2-6>}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} \left(\frac{a}{2}\right)\log\left(\left(\frac{\mathrm{cha}+\mathrm{cosa}}{\mathrm{cha}-\mathrm{cosa}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch3a}+\mathrm{cosa}}{\mathrm{ch3a}-\mathrm{cosa}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch5a}+\mathrm{cosa}}{\mathrm{ch5a}-\mathrm{cosa}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch7a}+\mathrm{cosa}}{\mathrm{ch7a}-\mathrm{cosa}}\right)\cdots\right)\qquad \text{---<S2-7>}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} a\cdot\log\left(\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}8a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}12a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}12a-\mathrm{ch}a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}16a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}16a-\mathrm{ch}a}\right)\cdot\cdot\right)$$ ---<S2−8>

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} a\left(\tan^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{sh}a}\right)+3\tan^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{sh}3a}\right)+5\tan^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{sh}5a}\right)+7\tan^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{sh}7a}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --<S2−9>

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} 4a\left(\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}2a}\right)+3\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}6a}\right)+5\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}10a}\right)+7\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}14a}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --<S2−10>

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} 9a\left(\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}3a}\right)+3\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}9a}\right)+5\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}15a}\right)+7\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}21a}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --<S2−11>

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} 16a\left(\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}4a}\right)+3\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}12a}\right)+5\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}20a}\right)+7\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}28a}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --<S2−12>

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}\frac{a^3}{4}\left(\frac{2\times1\mathrm{ch}3a}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{3\times2\mathrm{ch}4a}{\mathrm{sh}^2 4a}+\frac{4\times3\mathrm{ch}5a}{\mathrm{sh}^2 5a}+\frac{5\times4\mathrm{ch}6a}{\mathrm{sh}^2 6a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S2−14>

◆$\frac{\pi^2}{6}$極限公式（ζ(2)極限公式）

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} a\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-2a})(1-e^{-3a})(1-e^{-4a})\cdot\cdot}\right)$$ ----<S3>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2a^3\left(\frac{1^2}{\mathrm{ch}^2 a}+\frac{2^2}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{3^2}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{4^2}{\mathrm{ch}^2 4a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S3−2>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} a^3\left(\frac{1^2}{\mathrm{sh}^2 a}+\frac{2^2}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{4^2}{\mathrm{sh}^2 4a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S3−3>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 4a^2\left(\frac{1}{e^a+1}+\frac{3}{e^{3a}+1}+\frac{5}{e^{5a}+1}+\frac{7}{e^{7a}+1}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S3−4>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2a^2\left(\frac{1}{e^a-1}+\frac{3}{e^{3a}-1}+\frac{5}{e^{5a}-1}+\frac{7}{e^{7a}-1}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S3−5>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 4a^2\left(\frac{1}{e^{2a}-1}+\frac{2}{e^{4a}-1}+\frac{3}{e^{6a}-1}+\frac{4}{e^{8a}-1}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S3−6>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 4a^3\left(\frac{1^2}{\mathrm{ch}^2 a}+\frac{3^2}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{5^2}{\mathrm{ch}^2 5a}+\frac{7^2}{\mathrm{ch}^2 7a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S3−7>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2a^3\left(\frac{1^2}{\mathrm{sh}^2 a}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{5^2}{\mathrm{sh}^2 5a}+\frac{7^2}{\mathrm{sh}^2 7a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S3−8>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2a^2\left(\frac{1}{e^{a}+1}+\frac{2}{e^{2a}+1}+\frac{3}{e^{3a}+1}+\frac{4}{e^{4a}+1}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S3−9>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 4a\cdot\log\left((1+e^{-a})(1+e^{-3a})(1+e^{-5a})(1+e^{-7a})\cdot\cdot\right)$$ ----<S3−10>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2a\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-3a})(1-e^{-5a})(1-e^{-7a})\cdot\cdot}\right)$$ ----<S3−11>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2a\cdot\log\left((1+e^{-a})(1+e^{-2a})(1+e^{-3a})(1+e^{-4a})\cdot\cdot\right)$$ ----<S3−12>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2a^2\left(\left(\frac{1}{\mathrm{th}2a}-1\right)+2\left(\frac{1}{\mathrm{th}3a}-1\right)+3\left(\frac{1}{\mathrm{th}4a}-1\right)+4\left(\frac{1}{\mathrm{th}5a}-1\right)+\cdot\cdot\right)$$ --<S3−１３>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 4a^2\left((1-\mathrm{th}2a)+2(1-\mathrm{th}3a)+3(1-\mathrm{th}4a)+4(1-\mathrm{th}5a)+\cdot\cdot\right)$$ --<S3−１４>

==================================

$\pi^2/8$ 極限公式の＜S2－2＞すなわち次式に関連して、下記青字の$\pi^2/8$ 不等式−定理 2 を見出した。

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} 2a\cdot\log\left(\frac{1}{\mathrm{th}a\cdot\mathrm{th}3a\cdot\mathrm{th}5a\cdot\mathrm{th}7a\cdot\mathrm{th}a9a\cdots}\right)$$ ----<S2−2>

$\pi^2/8$ 不等式−定理 2

次の (1)，(2) が成り立つ。

(1) 任意の正の実数 a について、次の不等式①と②が成り立つ。

$$a\left(\frac{1}{\mathrm{sh}a}+\frac{1}{3\mathrm{sh}3a}+\frac{1}{5\mathrm{sh}5a}+\frac{1}{7\mathrm{sh}7a}+\cdot\cdot\right)<\frac{\pi^2}{8}$$ ------①

$(a>0)$

$$2a\cdot\log\left(\frac{1}{\mathrm{th}a\cdot\mathrm{th}3a\cdot\mathrm{th}5a\cdot\mathrm{th}7a\cdot\mathrm{th}a9a\cdots}\right)<\frac{\pi^2}{8}$$ ------②

$(a>0)$

(2)　①と②は上式の形で最良である。すなわち、右辺が$\pi^2/8$ より僅かでも小さい場合、(1) は成り立たない。

さらに$\pi^2/6$極限公式の<S3－6>すなわち次式に関連して、下記青字の$\pi^2/6$不等式-定理3を見出した。

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 4a^2\left(\frac{1}{e^{2a}-1}+\frac{2}{e^{4a}-1}+\frac{3}{e^{6a}-1}+\frac{4}{e^{8a}-1}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S3-6>}$$

$\pi^2/6$不等式-定理3

次の(1), (2)が成り立つ。

(1) 任意の正の実数aについて、次の不等式①と②が成り立つ。

$$a^2\left(\frac{1}{\mathrm{sh}^2 a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 4a}+\cdot\cdot\right)<\frac{\pi^2}{6} \quad \text{------①}$$

$(a>0)$

$$a^2\left(\frac{1}{e^{a}-1}+\frac{2}{e^{2a}-1}+\frac{3}{e^{3a}-1}+\frac{4}{e^{4a}-1}+\cdot\cdot\right)<\frac{\pi^2}{6} \quad \text{------②}$$

$(a>0)$

(2) ①と②は上式の形で最良である。すなわち、右辺が$\pi^2/6$より僅かでも小さい場合、(1)は成り立たない。

今回、これらの定理を見出した。証明はここ３回（ここ と ここ と こちら）で示した証明と類似のものになるので略す。なお、Wolfram Alphaによる数値検証でもこれらの定理が成立することを確認している。

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●上記の定理で興味を惹くのは、不等式の右辺がゼータの特殊値になっていてそれが不等式の最良を決めている点である。大事な境界線がゼータの特殊値となっているのが面白い点といえる。

●$\pi^2/8$不等式-定理2ではその証明（略したが）において次式が中心的な役割を果たす。これはこちらで紹介した[1]であるが、２年以上も前に導出した恒等式である。

$$\frac{1}{\mathrm{sh}2a}+\frac{1}{3\mathrm{sh}6a}+\frac{1}{5\mathrm{sh}10a}+\frac{1}{7\mathrm{sh}14a}+\cdot\cdot=\log\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}a}+\log\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{sh}3a}+\log\frac{\mathrm{ch}5a}{\mathrm{sh}5a}+\log\frac{\mathrm{ch}7a}{\mathrm{sh}7a}+\cdot\cdot \quad \text{--[1]}$$

$(a>0)$

また$\pi^2/6$不等式-定理3では、次式が中心的役割を果たしている。これはこちらで紹介した[1]であり、番号が上式と被るので(1)とするが、これは１年半前に見出した。

$$\frac{1}{e^{2a}-1}+\frac{2}{e^{4a}-1}+\frac{3}{e^{6a}-1}+\frac{4}{e^{8a}-1}+\cdot\cdot=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{sh}^2 a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 4a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----(1)}$$

$(a>0)$

どちらも興味ある式だが、独断と偏見でいえば、[1]の方が深い。[1]は積分の方向から出た式でありそれは困難な方向であって、出てくる結果は重く深いものになる。(1)は微分の方向であり軽い方向である。

●ノートに書いてきたたくさんの母等式や恒等式を見直していると、それらをながめるだけでいろいろなイマジネーションがわき起こってきて収拾がつかない感じになる。その混乱状態を抑えるために、できるだけきれいに何度も何度も整理整頓し直しつづけるわけだけれども、それは面倒なことこの上ない作業である。その作業はただ式を書き写すという単調なことの繰り返しとなる。公式や定理というのはすぱっと出る印象があるかもしれないが、そうではなく、単調なる整理整頓と退屈な作業が基盤となって出てくる。

●次の四式を眺めたい。

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} a\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-2a})(1-e^{-3a})(1-e^{-4a})\cdot\cdot}\right)$$ ----＜S3＞

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 4a\cdot\log\left((1+e^{-a})(1+e^{-3a})(1+e^{-5a})(1+e^{-7a})\cdot\cdot\right)$$ ----＜S3－10＞

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2a\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-3a})(1-e^{-5a})(1-e^{-7a})\cdot\cdot}\right)$$ ----＜S3－11＞

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2a\cdot\log\left((1+e^{-a})(1+e^{-2a})(1+e^{-3a})(1+e^{-4a})\cdot\cdot\right)$$ ----＜S3－12＞

上は、テータ関数の極限がゼータ特殊値を生み出すとも読めるし、いろいろな連想を与えてくれる。

●次も見よう。

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} a\cdot\log\left(\frac{1}{\mathrm{tha}\cdot\mathrm{th2a}\cdot\mathrm{th3a}\cdot\mathrm{th4a}\cdot\mathrm{th5a}\cdots}\right)$$ ----＜S2－1＞

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} 2a\cdot\log\left(\frac{1}{\mathrm{tha}\cdot\mathrm{th3a}\cdot\mathrm{th5a}\cdot\mathrm{th7a}\cdot\mathrm{tha9a}\cdots}\right)$$ ----＜S2－2＞

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} a\cdot\log\left(\left(\frac{\mathrm{ch2a+cha}}{\mathrm{ch2a-cha}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch6a+cha}}{\mathrm{ch6a-cha}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch10a+cha}}{\mathrm{ch10a-cha}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch14a+cha}}{\mathrm{ch14a-cha}}\right)\cdot\cdot\right)$$ ---＜S2－6＞

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{a}{2}\right)\log\left(\left(\frac{\mathrm{cha+cosa}}{\mathrm{cha-cosa}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch3a+cosa}}{\mathrm{ch3a-cosa}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch5a+cosa}}{\mathrm{ch5a-cosa}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch7a+cosa}}{\mathrm{ch7a-cosa}}\right)\cdot\cdot\right)$$ ---＜S2－7＞

右辺の log 内にはテータの兄弟や親戚筋が現れているように思う。

＝＝

2025.12.20 杉岡幹生

sugioka_m@mvb.biglobe.ne.jp

＜参考文献＞

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)