＜ 三角関数と双曲線関数の融合域（その５８）＞

今回、$\pi^2/8$ に関する不等式の定理を見出したので報告したい。$\pi^2/6$ 不等式-定理は先に二つ出したが、$\pi^2/8$ 関連では初めてなので$\pi^2/8$ 不等式-定理 1 と名付け、下方に青字で示した。それはこれまで出した極限公式とも関係しているため、まず先に過去に出した$\pi^2/8$ 極限公式を全て列挙し、次に発見した定理を示す。

なお、こちらで示した＜Ｓ２－１３＞は＜Ｓ２―２＞と同値と気づいたので＜Ｓ２－１３＞は省き、欠番とした。

また、$\pi^2/8$ と$\zeta(2)$つまり$\pi^2/6$ の関係は次の通りとなる。

$\zeta(2) = 1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + \cdot\cdot = \pi^2/6$

$(3/4)\zeta(2) = 1 + 1/3^2 + 1/5^2 + 1/7^2 + \cdot\cdot = \pi^2/8$（一つ上と実質は同じ）

以下では、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。a は任意の実数である。$\tan^{-1}$, th^{-1} はそれぞれ arctan, arctanh である。log は自然対数、e は自然対数の底。sin, cos, tan は通常の表記である。

なお、lim での a->+0 は a をプラス側から 0 に近づける意味である。

＝＝

◆$\dfrac{\pi^2}{8}$極限公式 （$3\zeta(2)/4$ 極限公式）

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} a\cdot\log\left(\frac{1}{\mathrm{tha}\cdot\mathrm{th2a}\cdot\mathrm{th3a}\cdot\mathrm{th4a}\cdot\mathrm{th5a}\cdots}\right) \qquad \text{----＜S2－1＞}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} 2a\cdot\log\left(\frac{1}{\mathrm{tha}\cdot\mathrm{th3a}\cdot\mathrm{th5a}\cdot\mathrm{th7a}\cdot\mathrm{tha9a}\cdots}\right) \qquad \text{----＜S2－2＞}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} a^2\left(\frac{2}{\mathrm{sh2a}}+\frac{4}{\mathrm{sh4a}}+\frac{6}{\mathrm{sh6a}}+\frac{8}{\mathrm{sh8a}}+\cdot\cdot\right) \qquad \text{----＜S2－3＞}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} a^2\left(\frac{1}{\mathrm{sha}}+\frac{3}{\mathrm{sh3a}}+\frac{5}{\mathrm{sh5a}}+\frac{7}{\mathrm{sh7a}}+\cdot\cdot\right) \qquad \text{----＜S2－4＞}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{sh2a}}+\frac{2}{\mathrm{sh3a}}+\frac{3}{\mathrm{sh4a}}+\frac{4}{\mathrm{sh5a}}+\cdot\cdot\right) \qquad \text{----＜S2－5＞}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} a\cdot\log\left(\left(\frac{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch10a}+\mathrm{cha}}{\mathrm{ch10a}-\mathrm{cha}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch14a}+\mathrm{cha}}{\mathrm{ch14a}-\mathrm{cha}}\right)\cdot\cdot\right) \qquad \text{---＜S2－6＞}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} \left(\frac{a}{2}\right)\log\left(\left(\frac{\mathrm{cha}+\cos a}{\mathrm{cha}-\cos a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch3a}+\cos a}{\mathrm{ch3a}-\cos a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch5a}+\cos a}{\mathrm{ch5a}-\cos a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch7a}+\cos a}{\mathrm{ch7a}-\cos a}\right)\cdot\cdot\right) \qquad \text{---＜S2－7＞}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} a\cdot\log\left(\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}8a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}12a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}12a-\mathrm{ch}a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}16a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}16a-\mathrm{ch}a}\right)\cdot\cdot\right) \qquad \text{---}\langle S2-8\rangle$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} a\left(\tan^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{sh}a}\right)+3\tan^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{sh}3a}\right)+5\tan^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{sh}5a}\right)+7\tan^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{sh}7a}\right)+\cdot\cdot\right) \qquad \text{--}\langle S2-9\rangle$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} 4a\left(\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}2a}\right)+3\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}6a}\right)+5\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}10a}\right)+7\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}14a}\right)+\cdot\cdot\right) \qquad \text{--}\langle S2-10\rangle$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} 9a\left(\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}3a}\right)+3\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}9a}\right)+5\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}15a}\right)+7\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}21a}\right)+\cdot\cdot\right) \qquad \text{--}\langle S2-11\rangle$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} 16a\left(\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}4a}\right)+3\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}12a}\right)+5\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}20a}\right)+7\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}28a}\right)+\cdot\cdot\right) \qquad \text{--}\langle S2-12\rangle$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}\frac{a^3}{4}\left(\frac{2\times1\mathrm{ch}3a}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{3\times2\mathrm{ch}4a}{\mathrm{sh}^2 4a}+\frac{4\times3\mathrm{ch}5a}{\mathrm{sh}^2 5a}+\frac{5\times4\mathrm{ch}6a}{\mathrm{sh}^2 6a}+\cdot\cdot\right) \qquad \text{---}\langle S2-14\rangle$$

================================

一番上の<S2－1>すなわち次の極限公式に関連して、私は下記青字の定理を見出した。

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} a\cdot\log\left(\frac{1}{\mathrm{th}a\cdot\mathrm{th}2a\cdot\mathrm{th}3a\cdot\mathrm{th}4a\cdot\mathrm{th}5a\cdots}\right) \qquad \text{----}\langle S2-1\rangle$$

$\pi^2/8$ 不等式–定理 1

次の (1) , (2) が成り立つ。

(1) 任意の正の実数 a について、次の不等式①と②が成り立つ。

$$a\left(\frac{1}{e^a-1}+\frac{1}{3(e^{3a}-1)}+\frac{1}{5(e^{5a}-1)}+\frac{1}{7(e^{7a}-1)}+\cdot\cdot\right)<\frac{\pi^2}{8} \qquad \text{-----①}$$

$$(a>0)$$

$$a\cdot\log\left(\frac{1}{\mathrm{th}a\cdot\mathrm{th}2a\cdot\mathrm{th}3a\cdot\mathrm{th}4a\cdot\mathrm{th}5a\cdots}\right)<\frac{\pi^2}{8} \qquad \text{-----②}$$

$$(a>0)$$

(2) ①と②は上式の形で最良である。すなわち、右辺が$\pi^2/8$ より僅かでも小さい場合、(1) は成り立たない。

この定理の証明を以下に示す。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

$\pi^2/8$ 不等式–定理 1 の証明

まず(1)から示していく。a を正の実数として（a>0）、F(a)を次のように置く。

$$F(a)=\frac{a}{e^a-1}+\frac{a}{3(e^{3a}-1)}+\frac{a}{5(e^{5a}-1)}+\frac{a}{7(e^{7a}-1)}+\cdot\cdot \qquad \text{-----[A]}$$

$$(a>0)$$

さて、ここでe^aの a=0 周りのテイラー展開は次のようになる。

$$e^a=1+a+a^2/2!+a^3/3!+a^4/4!+\cdot\cdot \qquad \text{----[B]}$$

よって、

$$e^a-1=a+a^2/2!+a^3/3!+a^4/4!+\cdot\cdot \qquad \text{----[B]-2}$$

[A]に対し[B]-2 を利用すると、次のようになる。

$$F(a)=\frac{a}{e^a-1}+\frac{a}{3(e^{3a}-1)}+\frac{a}{5(e^{5a}-1)}+\frac{a}{7(e^{7a}-1)}+\cdot\cdot$$

$$<\frac{a}{(a+a^2/2!)}+\frac{a}{3(3a+(3a)^2/2!)}+\frac{a}{5(5a+(5a)^2/2!)}+\frac{a}{7(7a+(7a)^2/2!)}+\cdot\cdot$$

$$=\frac{1}{(1+a/2!)}+\frac{1}{3(3+3^2\cdot a/2!)}+\frac{1}{5(5+5^2\cdot a/2!)}+\frac{1}{7(7+7^2\cdot a/2!)}+\cdot\cdot$$

$$<1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdot\cdot=\frac{\pi^2}{8}$$

よって、

$$\frac{a}{e^a-1}+\frac{a}{3(e^{3a}-1)}+\frac{a}{5(e^{5a}-1)}+\frac{a}{7(e^{7a}-1)}+\cdot\cdot<\frac{\pi^2}{8}$$

左辺でaをくくり出して次となり、よってまず目標の一つ目の①が証明された。

$$a\left(\frac{1}{e^a-1}+\frac{1}{3(e^{3a}-1)}+\frac{1}{5(e^{5a}-1)}+\frac{1}{7(e^{7a}-1)}+\cdot\cdot\right)<\frac{\pi^2}{8} \qquad \text{-----①}$$

$$(a>0)$$

次に、１年半前に出した、こちらの恒等式[A5]に着目する（右辺を同値変形した）。次のものである。

$$\frac{1}{e^{2a}-1}+\frac{1}{3(e^{6a}-1)}+\frac{1}{5(e^{10a}-1)}+\frac{1}{7(e^{14a}-1)}+\cdot\cdot=\left(\frac{1}{2}\right)\log\left(\frac{1}{\mathrm{tha\cdot th2a\cdot th3a\cdot th4a\cdot th5a\cdots}}\right) \qquad \text{---[A5]}$$

$$(a>0)$$

上式で 2a を a に置き換えて次を得る。

$$\frac{1}{e^a-1}+\frac{1}{3(e^{3a}-1)}+\frac{1}{5(e^{5a}-1)}+\frac{1}{7(e^{7a}-1)}+\cdot\cdot=\left(\frac{1}{2}\right)\log\left(\frac{1}{\mathrm{th(a/2)\cdot tha\cdot th(3a/2)\cdot th2a\cdot th(5a/2)\cdots}}\right) \qquad \text{---[A5]-2}$$

$$(a>0)$$

そして①とこの[A5]-2 から容易に次がわかる。

$$\left(\frac{a}{2}\right)\log\left(\frac{1}{\mathrm{th}(a/2)\cdot\mathrm{th}a\cdot\mathrm{th}(3a/2)\cdot\mathrm{th}2a\cdot\mathrm{th}(5a/2)\cdots}\right) < \frac{\pi^2}{8} \qquad \text{-----②-1}$$

$$(a > 0)$$

上式で a を 2a として同値変形して、次式を得る。

$$a\cdot\log\left(\frac{1}{\mathrm{th}a\cdot\mathrm{th}2a\cdot\mathrm{th}3a\cdot\mathrm{th}4a\cdot\mathrm{th}5a\cdots}\right) < \frac{\pi^2}{8} \qquad \text{-----②}$$

$$(a > 0)$$

これは目標の二つ目の②そのものである。よって、②も証明できた。
したがって、これでまず(1)の証明が完了した。

次に(2)を示していく。
F(a)は[B]-2 から次のように変形できる。

$$F(a) = \frac{a}{a+a^2/2!+a^3/3!+\cdot\cdot} + \frac{a}{3(3a+(3a)^2/2!+(3a)^3/3!+\cdot\cdot)} + \frac{a}{5(5a+(5a)^2/2!+(5a)^3/3!+\cdot\cdot)} + \frac{a}{7(7a+(7a)^2/2!+(7a)^3/3!+\cdot\cdot)} + \cdot\cdot$$

右辺を変形して次となる。

$$F(a) = \frac{1}{1+a/2!+a^2/3!+\cdot\cdot} + \frac{1}{3(3+3^2\cdot a/2!+3^3\cdot a^2/3!+\cdot\cdot)} + \frac{1}{5(5+5^2\cdot a/2!+5^3\cdot a^2/3!+\cdot\cdot)} + \frac{1}{7(7+7^2\cdot a/2!+7^3\cdot a^2/3!+\cdot\cdot)} + \cdot\cdot \qquad \text{----[C]}$$

$$(a > 0)$$

さて、ここで、もし上方の①に関し、$\pi^2/8$ より僅かに小さい値でも不等式が成立したと仮定しよう($\varepsilon>0$)。
すなわち、

$$a\left(\frac{1}{e^a-1} + \frac{1}{3(e^{3a}-1)} + \frac{1}{5(e^{5a}-1)} + \frac{1}{7(e^{7a}-1)} + \cdot\cdot\right) < \frac{\pi^2}{8}-\varepsilon \qquad \text{----[D]}$$

$$(a > 0)$$

しかし、この[D]は成り立たない。なぜなら[C]で a をどんどんと＋側から 0 に近づけていけば、[C]の形から[D]左辺（つまり F(a)）は、どんどんと（$1+1/3^2+1/5^2+\cdot\cdot$）つまり$\pi^2/8$ に近づいていき、ついには$\frac{\pi^2}{8}-\varepsilon$ よりも大きくなるときが必ず来るからである(しかし$\pi^2/8$ よりは小さい！ ①を見よ)。それは[D]と矛盾する。
よって、ε は 0 でしかありえず、①はその形が最良とわかる。

また[A5]-2 から即座に②-1 もその形が最良とわかる（①が最良であるから)。そして②-1 を同値変形した②も当然最良となる。よって、①も②もその形が最良とわかり、これで(2)が証明された。
以上で、(1)と(2)の証明は完了した。
終わり。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このようにして$\pi^2/8$ 不等式-定理 1 は証明された。証明の中で[A5](または[A5]-2)が重要な役割を果たしていることがわかる。なお、この定理は Wolfram Alpha でも数値検証を行い、その正しさを確認している。

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

＝＝＝

●今回の$\pi^2/8$不等式-定理 1 と、前回の$\pi^2/6$不等式-定理 2 を比べよう。

$\pi^2/8$ 不等式-定理 1

次の(1), (2)が成り立つ。

(1) 任意の正の実数 a について、次の不等式①と②が成り立つ。

$$a\left(\frac{1}{e^a-1}+\frac{1}{3(e^{3a}-1)}+\frac{1}{5(e^{5a}-1)}+\frac{1}{7(e^{7a}-1)}+\cdot\cdot\right)<\frac{\pi^2}{8} \quad \text{-----①}$$

$(a>0)$

$$a\cdot\log\left(\frac{1}{\mathrm{tha}\cdot\mathrm{th2a}\cdot\mathrm{th3a}\cdot\mathrm{th4a}\cdot\mathrm{th5a}\cdots}\right)<\frac{\pi^2}{8} \quad \text{-----②}$$

$(a>0)$

(2) ①と②は上式の形で最良である。すなわち、右辺が$\pi^2/8$より僅かでも小さい場合、(1)は成り立たない。

$\pi^2/6$ 不等式-定理 2

次の(1), (2)が成り立つ。

(1) 任意の正の実数 a について、次の不等式①と②が成り立つ。

$$a\left(\frac{1}{e^a-1}+\frac{1}{2(e^{2a}-1)}+\frac{1}{3(e^{3a}-1)}+\frac{1}{4(e^{4a}-1)}+\cdot\cdot\right)<\frac{\pi^2}{6} \quad \text{-----①}$$

$(a>0)$

$$a\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-2a})(1-e^{-3a})(1-e^{-4a})\cdot\cdot}\right)<\frac{\pi^2}{6} \quad \text{-----②}$$

$(a>0)$

(2) ①と②は上式の形で最良である。すなわち、右辺が$\pi^2/6$より僅かでも小さい場合、(1)は成り立たない。

どちらもきれいであり、根源的なものを感じる。$\pi^2/8$は、

$1+1/3^2+1/5^2+1/7^2+\cdot\cdot$

$=(1+1/2^2+1/3^2+1/4^2+1/5^2+1/6^2+\cdot\cdot)-(1/2^2+1/4^2+1/6^2+\cdot\cdot)$

$=\zeta(2)-1/2^2(1+1/2^2+1/3^2+\cdot\cdot)=\zeta(2)-1/2^2\zeta(2)=(3/4)\zeta(2)=(3/4)\pi^2/6=\pi^2/8$

となるので、実質的に$\zeta(2)$そのものである。

上の二定理に関しは、明示的な特殊値ζ(2)が不等式の最良の限界となっていることを示していて、なにかを暗示しているかのようである。

●ゼータの明示的な特殊値は大切なものである。ζ(2)＝$\pi^2/6$、ζ(4)＝$\pi^4/90$、ζ(6)＝$\pi^6/945$、・・

これら特殊値は、ζ(s)の自明な零点ζ(-2)＝0、ζ(-4)＝0、ζ(-6)＝0、・・から生み出されていることが、昔開発したテイラーシステムという手法を使うことでわかった。自明な零点と明示的な特殊値は関係している。地下の自明な零点のおかげで、地上で明示的特殊値の花が咲く。すなわち、ζ(2)、ζ(4)、ζ(6)、・・はまったく特別な点なのである！ζ(5)とかζ(13/7)などは決して明示的な値にはならない。それは自明な零点に当たらないから・・。

では、非自明な零点はなにに関係しているのだろうか？

●極限公式を再掲。

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} a\cdot\log\left(\frac{1}{\mathrm{tha}\cdot\mathrm{th2a}\cdot\mathrm{th3a}\cdot\mathrm{th4a}\cdot\mathrm{th5a}\cdots}\right) \qquad \text{----}\langle S2-1\rangle$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} a\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-2a})(1-e^{-3a})(1-e^{-4a})\cdots}\right) \qquad \text{-----}\langle S3\rangle$$

これら極限公式が不等式の定理に関係している。

＜Ｓ２－１＞は今回の$\pi^2/8$不等式-定理１に対応し、＜Ｓ３＞が前回の$\pi^2/6$不等式-定理２に対応している。極限公式はかなり前に出しておきながら、私は不等式の定理には長く気づかなかった。

ふり返ってみると、極限公式というのは崖の端の地点にあり高い断崖絶壁の真下は海というところにあって、そんなぎりぎりの地点に立って辿って来た道を振りかえったとき、花園のようなものが遠くに見え、近づいていき、そしてその花園（不等式）が発見できたような気がする。

●恒等式再掲。

$$\frac{1}{e^{2a}-1}+\frac{1}{3(e^{6a}-1)}+\frac{1}{5(e^{10a}-1)}+\frac{1}{7(e^{14a}-1)}+\cdots=\left(\frac{1}{2}\right)\log\left(\frac{1}{\mathrm{tha}\cdot\mathrm{th2a}\cdot\mathrm{th3a}\cdot\mathrm{th4a}\cdot\mathrm{th5a}\cdots}\right) \qquad \text{---[A5]}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{(e^{a}-1)}+\frac{1}{2(e^{2a}-1)}+\frac{1}{3(e^{3a}-1)}+\frac{1}{4(e^{4a}-1)}+\cdots=\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-2a})(1-e^{-3a})(1-e^{-4a})\cdots}\right) \qquad \text{---}\langle F1\rangle$$

$$(a>0)$$

[A5]は、今回の$\pi^2/8$不等式-定理１の上方の証明中で示した恒等式であり、１年半前にこちらで見出した式である（右辺を同値変形している）。

一方、＜Ｆ１＞は、$\pi^2/6$不等式-定理２に関係し前回示したものだが、２年近く前のこちらで初めて見出したものである。

どちらもすばらしい形をしている！これら恒等式が、不等式の定理と極限公式の間をつなぐ橋の役割を果たしている。

●上記恒等式は、見ているだけで心愉しくなる式であるが、<F１>の右辺 log 内の分母はテータ関数そのものであり、とても本質的である。⇒可積分系とコマ（その１７）

[A5]の右辺 log 内の分母も同じような感じで、テータの親戚筋にあたるものであろう。

●やはり気になるのはテータ関数である。１年前のこちらで出した式のいくつかを眺めよう。

****

$$\frac{\alpha}{e^a+1}+\frac{\alpha^3}{3(e^{3a}+1)}+\frac{\alpha^5}{5(e^{5a}+1)}+\frac{\alpha^7}{7(e^{7a}+1)}+\cdot\cdot$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)\log\left(\frac{(1+\alpha e^{-a})(1-\alpha e^{-2a})(1+\alpha e^{-3a})(1-\alpha e^{-4a})\cdot\cdot}{(1-\alpha e^{-a})(1+\alpha e^{-2a})(1-\alpha e^{-3a})(1+\alpha e^{-4a})\cdot\cdot}\right) \quad \text{----<N2>}$$

$(|\alpha|<e^a$ 且つ $a>0)$

$$\frac{\alpha}{e^a-1}+\frac{\alpha^2}{2(e^{2a}-1)}+\frac{\alpha^3}{3(e^{3a}-1)}+\frac{\alpha^4}{4(e^{4a}-1)}+\cdot\cdot$$

$$=\log\left(\frac{1}{(1-\alpha e^{-a})(1-\alpha e^{-2a})(1-\alpha e^{-3a})(1-\alpha e^{-4a})\cdot\cdot}\right) \quad \text{----<Q1>}$$

$(|\alpha|<e^a$ 且つ $a>0)$

$$\frac{\alpha\,\mathrm{ch}a}{(\mathrm{sh}a)^2}-\frac{\alpha^2\mathrm{ch}2a}{2(\mathrm{sh}2a)^2}+\frac{\alpha^3\mathrm{ch}3a}{3(\mathrm{sh}3a)^2}-\frac{\alpha^4\mathrm{ch}4a}{4(\mathrm{sh}4a)^2}+-\cdot\cdot$$

$$=2\log\left((1+\alpha e^{-a})(1+\alpha e^{-3a})^3(1+\alpha e^{-5a})^5(1+\alpha e^{-7a})^7\cdot\cdot\right) \quad \text{----<R1>}$$

$(-e^a<\alpha\leqq e^a$ 且つ $a>0)$

****

右辺はテータ関数の親分や親戚、その進化系ともいうべきテーター族(いちぞく)の姿が現れているようで壮観である。テータ関数はおそらくガウス(1777-1855)が最初に見つけた（重要視した）ものと思うが、ガウスはほとんど公表していないので、主にはヤコビ(1805-1851)が最初に公表した関数と思う。上記の式たちを眺めていると、テータの洞窟はもっとずっと奥まで枝分かれして果てしなく続いている気がする。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2025.12.13 杉岡幹生

sugioka_m@mvb.biglobe.ne.jp

<参考文献>

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)

・可積分系とコマ（その１７）