＜ 三角関数と双曲線関数の融合域（その５７）＞

　前回に続いて、$\pi^2/6$ 不等式-定理の二つ目を見出したので報告したい。その定理はこれまで提示してきた極限公式とも関連しているが、今回のものを二つ目なので$\pi^2/6$ 不等式-定理 2 と名付け、下方に青字で示した。まず先に過去に出した$\pi^2/6$ 極限公式をすべて列挙し、次に発見した定理を示す。

　以下では、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。a は任意の実数である。$\tan^{-1}$, th^{-1} はそれぞれ arctan, arctanh である。log は自然対数、e は自然対数の底。sin, cos, tan は通常の表記である。

　なお、lim での a->+0 は a をプラス側から 0 に近づける意味である。

＝＝

◆$\dfrac{\pi^2}{6}$極限公式（ζ(2)極限公式）

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} a\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-2a})(1-e^{-3a})(1-e^{-4a})\cdot\cdot}\right)$$ ----<S3>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2a^3\left(\frac{1^2}{\mathrm{ch}^2 a}+\frac{2^2}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{3^2}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{4^2}{\mathrm{ch}^2 4a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S3−2>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} a^3\left(\frac{1^2}{\mathrm{sh}^2 a}+\frac{2^2}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{4^2}{\mathrm{sh}^2 4a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S3−3>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 4a^2\left(\frac{1}{e^a+1}+\frac{3}{e^{3a}+1}+\frac{5}{e^{5a}+1}+\frac{7}{e^{7a}+1}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S3−4>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2a^2\left(\frac{1}{e^a-1}+\frac{3}{e^{3a}-1}+\frac{5}{e^{5a}-1}+\frac{7}{e^{7a}-1}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S3−5>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 4a^2\left(\frac{1}{e^{2a}-1}+\frac{2}{e^{4a}-1}+\frac{3}{e^{6a}-1}+\frac{4}{e^{8a}-1}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S3−6>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 4a^3\left(\frac{1^2}{\mathrm{ch}^2 a}+\frac{3^2}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{5^2}{\mathrm{ch}^2 5a}+\frac{7^2}{\mathrm{ch}^2 7a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S3−7>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2a^3\left(\frac{1^2}{\mathrm{sh}^2 a}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{5^2}{\mathrm{sh}^2 5a}+\frac{7^2}{\mathrm{sh}^2 7a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S3−8>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2a^2\left(\frac{1}{e^a+1}+\frac{2}{e^{2a}+1}+\frac{3}{e^{3a}+1}+\frac{4}{e^{4a}+1}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S3−9>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 4a\cdot\log\Bigl((1+e^{-a})(1+e^{-3a})(1+e^{-5a})(1+e^{-7a})\cdot\cdot\Bigr) \qquad ----<\mathrm{S3-10}>$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2a\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-3a})(1-e^{-5a})(1-e^{-7a})\cdot\cdot}\right) \qquad ----<\mathrm{S3-11}>$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} a\cdot\log\bigl(2(1+e^{-a})^2(1+e^{-2a})^2(1+e^{-3a})^2(1+e^{-4a})^2\cdot\cdot\bigr) \qquad ----<\mathrm{S3-12}>$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2a^2\left(\left(\frac{1}{\mathrm{th}2a}-1\right)+2\left(\frac{1}{\mathrm{th}3a}-1\right)+3\left(\frac{1}{\mathrm{th}4a}-1\right)+4\left(\frac{1}{\mathrm{th}5a}-1\right)+\cdot\cdot\right) \qquad --<\mathrm{S3-13}>$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 4a^2\Bigl(\bigl(1-\mathrm{th}2a\bigr)+2\bigl(1-\mathrm{th}3a\bigr)+3\bigl(1-\mathrm{th}4a\bigr)+4\bigl(1-\mathrm{th}5a\bigr)+\cdot\cdot\Bigr) \qquad --<\mathrm{S3-14}>$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

一番上の<Ｓ３>すなわち次のものに関連して、私は下記の定理を発見した。

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} a\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-2a})(1-e^{-3a})(1-e^{-4a})\cdot\cdot}\right) \qquad ----<\mathrm{S3}>$$

$\pi^2/6$ 不等式−定理 2

次の(1), (2)が成り立つ。

(1) 任意の正の実数 a について、次の不等式①と②が成り立つ。

$$a\left(\frac{1}{e^a-1}+\frac{1}{2(e^{2a}-1)}+\frac{1}{3(e^{3a}-1)}+\frac{1}{4(e^{4a}-1)}+\cdot\cdot\right)<\frac{\pi^2}{6} \qquad -----①$$

$$(a>0)$$

$$a\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-2a})(1-e^{-3a})(1-e^{-4a})\cdot\cdot}\right)<\frac{\pi^2}{6} \qquad -----②$$

$$(a>0)$$

(2)　①と②は上式の形で最良である。すなわち、右辺が$\pi^2/6$ より僅かでも小さい場合、(1)は成り立たない。

この定理の証明を以下に示す。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

$\pi^2/6$ 不等式−定理 2 の証明

まず(1)から示していく。a を正の実数として（a>0)、F(a) を次のように置く。

$$F(a)=\frac{a}{e^a-1}+\frac{a}{2(e^{2a}-1)}+\frac{a}{3(e^{3a}-1)}+\frac{a}{4(e^{4a}-1)}+\cdot\cdot \qquad \text{-----[A]}$$

$$(a>0)$$

さて、ここでe^aの a=0 周りのテイラー展開は次のようになる。

$e^a=1 +a +a^2/2! +a^3/3! +a^4/4! +\cdot\cdot$　　 ----[B]

よって、

$e^a-1=a +a^2/2! +a^3/3! +a^4/4! +\cdot\cdot$　　 ----[B]-2

[A]に対し[B]-2 を利用して、次のようになる。

$$F(a)=\frac{a}{e^a-1}+\frac{a}{2(e^{2a}-1)}+\frac{a}{3(e^{3a}-1)}+\frac{a}{4(e^{4a}-1)}+\cdot\cdot$$

$$<\frac{a}{(a+a^2/2!)}+\frac{a}{2(2a+(2a)^2/2!)}+\frac{a}{3(3a+(3a)^2/2!)}+\frac{a}{4(4a+(4a)^2/2!)}+\cdot\cdot$$

$$=\frac{1}{(1+a/2!)}+\frac{1}{2(2+2^2\cdot a/2!)}+\frac{1}{3(3+3^2\cdot a/2!)}+\frac{1}{4(4+4^2\cdot a/2!)}+\cdot\cdot$$

$$<1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdot\cdot=\frac{\pi^2}{6}$$

よって、

$$\frac{a}{e^a-1}+\frac{a}{2(e^{2a}-1)}+\frac{a}{3(e^{3a}-1)}+\frac{a}{4(e^{4a}-1)}+\cdot\cdot<\frac{\pi^2}{6}$$

左辺でaをくくり出して次となり、よってまず目標の一つ目の①が証明された。

$$a\left(\frac{1}{e^a-1}+\frac{1}{2(e^{2a}-1)}+\frac{1}{3(e^{3a}-1)}+\frac{1}{4(e^{4a}-1)}+\cdot\cdot\right)<\frac{\pi^2}{6} \qquad \text{-----①}$$

$$(a>0)$$

次に、２年近く前のこちらで示した次の恒等式に着目する。

$$\frac{1}{(e^a-1)}+\frac{1}{2(e^{2a}-1)}+\frac{1}{3(e^{3a}-1)}+\frac{1}{4(e^{4a}-1)}+\cdot\cdot=\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-2a})(1-e^{-3a})(1-e^{-4a})\cdot\cdot}\right) \qquad \text{---<F1>}$$

$$(a>0)$$

①とこの<F1>から容易に次がわかる。これは目標の二つ目の②そのものである。

$$a\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-2a})(1-e^{-3a})(1-e^{-4a})\cdot\cdot}\right)<\frac{\pi^2}{6} \qquad \text{-----②}$$

$$(a>0)$$

よって、②も証明できた。

したがって、これでまず(1)の証明が完了した。

次に(2)を示していく。

F(a)は[B]-2 から次のように変形できる。

$$F(a)=\frac{a}{a+a^2/2!+a^3/3!+\cdot\cdot}+\frac{a}{2(2a+(2a)^2/2!+(2a)^3/3!+\cdot\cdot)}+\frac{a}{3(3a+(3a)^2/2!+(3a)^3/3!+\cdot\cdot)}+\frac{a}{4(4a+(4a)^2/2!+(4a)^3/3!+\cdot\cdot)}+\cdot\cdot$$

右辺を変形して次となる。

$$F(a)=\frac{1}{1+a/2!+a^2/3!+\cdot\cdot}+\frac{1}{2(2+2^2\cdot a/2!+2^3\cdot a^2/3!+\cdot\cdot)}+\frac{1}{3(3+3^2\cdot a/2!+3^3\cdot a^2/3!+\cdot\cdot)}+\frac{1}{4(4+4^2\cdot a/2!+4^3\cdot a^2/3!+\cdot\cdot)}+\cdot\cdot \quad \text{----[C]}$$

$(a>0)$

さて、ここで、もし上方の①に関し、$\pi^2/6$ より僅かに小さい値でも不等式が成立したと仮定しよう（$\varepsilon>0$）。
すなわち、

$$a\left(\frac{1}{e^a-1}+\frac{1}{2(e^{2a}-1)}+\frac{1}{3(e^{3a}-1)}+\frac{1}{4(e^{4a}-1)}+\cdot\cdot\right)<\frac{\pi^2}{6}-\varepsilon \qquad \text{----[D]}$$

$(a>0)$

しかし、この[D]は成り立たない。なぜなら[C]で a をどんどんと＋側から 0 に近づけていけば、[C]の形から[D]左辺（つまり F(a)）はどんどんと$\pi^2/6$ に近づいていき、ついには$\frac{\pi^2}{6}-\varepsilon$ よりも大きくなるときが必ず来るからである（しかし$\pi^2/6$ よりは小さい！ ①を見よ）。それは[D]と矛盾する。
よって、ε は 0 でしかありえず、①はその形が最良とわかる。

また＜F1＞から即座に②もその形が最良とわかる（①が最良であるから）。
よって、①も②もその形が最良とわかり、これで(2)が証明された。
以上で、(1)と(2)の証明は完了した。
終わり。
＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このようにして$\pi^2/6$ 不等式-定理 2 は証明された。証明の中で＜F1＞が重要な役割を果たしていることがわかる。

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

＝＝＝
●証明中の＜F1＞を再掲。

$$\frac{1}{(e^a-1)}+\frac{1}{2(e^{2a}-1)}+\frac{1}{3(e^{3a}-1)}+\frac{1}{4(e^{4a}-1)}+\cdot\cdot=\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-2a})(1-e^{-3a})(1-e^{-4a})\cdot\cdot}\right) \quad \text{---<F1>}$$

$(a>0)$

この式は上方での証明においてキーとなる役割を果たしていて、それは今回の定理の①と②を関連づける橋のようなものになっている。これは私が見出してきた中でも大事な恒等式の一つであり、よい形をしている。左辺は下記のラマヌジャン式に似ているし（ただしそれは恒等式ではないが）、ゼータの香りも漂っていて、また右辺 log の()内の分母は本質的にテータ関数と同じである。⇒可積分系とコマ（その１７）
＜F1＞は深いなにかを暗示していて、ここからいろいろな事柄がとびだしてくるような気がする。

ラマヌジャン式。ここで ϖ はレムニスケート周率である（まあ円周率πに似たもの・・）。

$$\frac{1}{(e^{2\pi}-1)}+\frac{1}{2(e^{4\pi}-1)}+\frac{1}{3(e^{6\pi}-1)}+\frac{1}{4(e^{8\pi}-1)}+\cdot\cdot\ =-\frac{\pi}{12}-\frac{1}{2}\log\left(\frac{\varpi}{\pi\sqrt{2}}\right)$$

●今回の定理と極限公式＜Ｓ３＞を並べよう。

$\pi^2/6$ 不等式-定理 2

次の(1), (2)が成り立つ。

(1) 任意の正の実数 a について、次の不等式①と②が成り立つ。

$$a\left(\frac{1}{e^a-1}+\frac{1}{2(e^{2a}-1)}+\frac{1}{3(e^{3a}-1)}+\frac{1}{4(e^{4a}-1)}+\cdot\cdot\right)<\frac{\pi^2}{6} \qquad \text{-----①}$$

$$(a>0)$$

$$a\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-2a})(1-e^{-3a})(1-e^{-4a})\cdot\cdot}\right)<\frac{\pi^2}{6} \qquad \text{-----②}$$

$$(a>0)$$

(2) ①と②は上式の形で最良である。すなわち、右辺が$\pi^2/6$ より僅かでも小さい場合、(1)は成り立たない。

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} a\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-2a})(1-e^{-3a})(1-e^{-4a})\cdot\cdot}\right) \qquad \text{----<S3>}$$

定理も極限公式もどちらもきれいである！

π^2/6 不等式-定理 2 と極限公式＜Ｓ３＞は密接な関係がある。その関係は前回でのπ^2/6 不等式-定理 1 で述べたこととまったく同じである。それはπ^2/6 不等式-定理 2 が親で、その子供が＜Ｓ３＞という関係である。それはまた果物の木でいえば、枝が定理 2 で、果実が＜Ｓ３＞である。木のもっとも端の最終到達地点が極限公式という感じである。

上の定理では“最良”を主張している点が大事である。それはディオファントス近似をすこし連想させたりして、よいものを醸し出している。

●ディオファントス近似の出発点を与えた定理にリウヴィルの定理がある。そして、その定理を改良した究極のものにロスの定理がある。ロスはそれでフィールズ賞をもらった(1958 年)。それらの定理はここには書かないが、私はロスの定理が昔から気になっていた。昔、ある薄い本を買いその後半にロスの定理が載っていて証明までついている。ロスの定理の解説はちょっと書いてあるのだが、その定理の意味がよくわからないでいた。わかるのだが わからないというもやもやがずっとつづいていた。どうしてわからないのか？自分は馬鹿なのか？と思ったり（笑)。

何年か前に「発見・予想を積み重ねるーそれが整数論」(安福悠著、オーム社）という本を買った。私はこの本を読んで、やっとロスの定理の意味が本当にわかった。ロスの定理の意味、凄さをわかるには、まずリウヴィルの定理を知らねばならず、そのリウヴィルの定理の改良が歴史的に積み重ねられ（リウヴィル⇒トゥエ⇒ジーゲル⇒ゲルフォント-ダイソン⇒ロス)、その最後の最後の最良形がロスの定理なのであった。

それは単に理想を求めるという意味からだけではなく、新たな超越数を見つけるためにはどうしてもリウヴィルの定理をもっとよい形に改良しなければならなかったのである。その必要性から数学者は死に物狂いでリウヴィルの定理を改良していったのだ！とわかった。なるほど、そういう流れからロスの定理は出てきたのか・・

その本の安福悠（やすふく・ゆう）氏の解説は感動的である！！先の薄い本とは大違いである。その安福氏の素晴らしい本は350ページもある分厚い本だが、私はリウヴィルの定理周辺の解説ばかり眺めてはよい気分に浸っている。

●数学書の解説はわかりにくいものが多い。高校生諸君は数学本でよくわからない解説に出会うことが多いと思う。そんなとき、つい「自分は頭が悪いのか？」と思ってしまいがちだが、そんなことを思う必要はまったくない。ほとんどのケースは本の解説がヘタなだけだからである。心配など要らない。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2025.12.6 杉岡幹生
sugioka_m@mvb.biglobe.ne.jp

＜参考文献＞

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」（Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社）
・可積分系とコマ（その１７）
・「発見・予想を積み重ねる－それが整数論」（安福悠著、オーム社）