

＜ 三角関数と双曲線関数の融合域（その５３） ＞

極限公式を新たに六つ見出したので下方に青色式で示す。なお、同公式は多く出すぎたため、今回のものに関係ないグループは略した。関係のあるグループは過去のものすべて示した。

以降において、 $L(2) \sim L(5)$ 、 $\zeta(3) \sim \zeta(4)$ は次の通り。

$$L(2) = 1 - 1/3^2 + 1/5^2 - 1/7^2 + \dots = \text{非明示 (カタランの定数)}$$

$$L(3) \text{ は } L(3) = 1 - 1/3^3 + 1/5^3 - 1/7^3 + \dots = \pi^3/32$$

$$L(4) = 1 - 1/3^4 + 1/5^4 - 1/7^4 + \dots = \text{非明示}$$

$$L(5) \text{ は } L(5) = 1 - 1/3^5 + 1/5^5 - 1/7^5 + \dots = 5\pi^5/1536$$

$$\zeta(3) = 1 + 1/2^3 + 1/3^3 + 1/4^3 + \dots = \text{非明示}$$

$$\zeta(4) = 1 + 1/2^4 + 1/3^4 + 1/4^4 + \dots = \pi^4/90$$

以降では、双曲線関数 $\sinh$, $\cosh$, $\tanh$ はそれぞれ sh , ch , th と略記した。例えば、 $sh2a$ は $\sinh(2a)$ のことである。 a は任意の実数である。 $\tan^{-1}$, th^{-1} はそれぞれ $\arctan$, $\operatorname{arctanh}$ である。 $\log$ は自然対数、 e は自然対数の底。 $\sin$, $\cos$, $\tan$ は通常の表記である。

なお、 $\lim$ での $a \rightarrow +0$ は a をプラス側から 0 に近づける意味であり、 $a \rightarrow \pm 0$ は a をプラス側, マイナス側 どちらから 0 に近づけても OK の意味である。

=====

＜ 極限公式 ＞

◆ $L(2)$ 極限公式

$$L(2) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} a \left(\tan^{-1} \left(\frac{1}{sha} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{sh3a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{sh5a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{sh7a} \right) + \dots \right) \quad \text{---<S1>}$$

$$L(2) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} a^2 \left(\frac{2}{ch2a} + \frac{4}{ch4a} + \frac{6}{ch6a} + \frac{8}{ch8a} + \dots \right) \quad \text{----<S1-2>}$$

$$L(2) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} a^2 \left(\frac{1}{cha} + \frac{3}{ch3a} + \frac{5}{ch5a} + \frac{7}{ch7a} + \dots \right) \quad \text{----<S1-3>}$$

$$L(2) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} a \left(\tan^{-1} \left(\frac{cha}{sha} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{cha}{sh3a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{cha}{sh5a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{cha}{sh7a} \right) + \dots \right) \quad \text{--<S1-4>}$$

$$L(2) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} 2a \left(\tan^{-1} \left(\frac{cha}{sh2a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{cha}{sh6a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{cha}{sh10a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{cha}{sh14a} \right) + \dots \right) \quad \text{--<S1-5>}$$

$$L(2) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} a \left(\tan^{-1} \left(\frac{\csc a}{sha} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\csc a}{sh3a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\csc a}{sh5a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\csc a}{sh7a} \right) + \dots \right) \quad \text{--<S1-6>}$$

$$L(2)=\lim_{a\rightarrow\pm0}a\left(\tan^{-1}\left(\frac{\text{sha}}{\text{cha}}\right)+3\tan^{-1}\left(\frac{\text{sha}}{\text{ch3a}}\right)+5\tan^{-1}\left(\frac{\text{sha}}{\text{ch5a}}\right)+7\tan^{-1}\left(\frac{\text{sha}}{\text{ch7a}}\right)+\cdot\cdot\right) \text{ --<S1-7>}$$

$$L(2)=\lim_{a\rightarrow\pm0}a\left(\text{th}^{-1}\left(\frac{\text{sina}}{\text{cha}}\right)+3\text{th}^{-1}\left(\frac{\text{sina}}{\text{ch3a}}\right)+5\text{th}^{-1}\left(\frac{\text{sina}}{\text{ch5a}}\right)+7\text{th}^{-1}\left(\frac{\text{sina}}{\text{ch7a}}\right)+\cdot\cdot\right) \text{ --<S1-8>}$$

$$L(2)=\lim_{a\rightarrow\pm0}2a\left(\tan^{-1}\left(\frac{\text{cha}}{\text{sh4a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\text{cha}}{\text{sh8a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\text{cha}}{\text{sh12a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\text{cha}}{\text{sh16a}}\right)+\cdot\cdot\right) \text{ --<S1-9>}$$

$$L(2)=\lim_{a\rightarrow\pm0}2a^2\left(\frac{1}{\text{ch3a}}+\frac{2}{\text{ch5a}}+\frac{3}{\text{ch7a}}+\frac{4}{\text{ch9a}}+\frac{5}{\text{ch11a}}+\frac{6}{\text{ch13a}}+\cdot\cdot\right) \text{ ----<S1-10>}$$

$$L(2)=\lim_{a\rightarrow\pm0}\frac{a}{2}\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{\text{sha}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\text{sh2a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\text{sh3a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\text{sh4a}}\right)+\cdot\cdot\right) \text{ --<S1-11>}$$

$$L(2)=\lim_{a\rightarrow+0}2a\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{\text{ea}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\text{e}^3\text{a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\text{e}^5\text{a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\text{e}^7\text{a}}\right)+\cdot\cdot\right) \text{ --<S1-12>}$$

$$L(2)=\lim_{a\rightarrow+0}a\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{\text{ea}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\text{e}^2\text{a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\text{e}^3\text{a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\text{e}^4\text{a}}\right)+\cdot\cdot\right) \text{ --<S1-13>}$$

$$L(2)=\lim_{a\rightarrow\pm0}\frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{\text{ch2a}}+\frac{2}{\text{ch3a}}+\frac{3}{\text{ch4a}}+\frac{4}{\text{ch5a}}+\cdot\cdot\right) \text{ ----<S1-14>}$$

◆ζ(3)極限公式

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{16a^2}{7}\log\left(\frac{1}{\text{th}2a\cdot\text{th}^23a\cdot\text{th}^34a\cdot\text{th}^45a\cdots}\right) \text{ ----<S6-1>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow\pm0}\frac{8a^4}{9}\left(\frac{2^3-2}{\text{ch}^22a}+\frac{3^3-3}{\text{ch}^23a}+\frac{4^3-4}{\text{ch}^24a}+\frac{5^3-5}{\text{ch}^25a}+\cdot\cdot\right) \text{ ----<S6-2>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow\pm0}\frac{2a^4}{3}\left(\frac{2^3-2}{\text{sh}^22a}+\frac{3^3-3}{\text{sh}^23a}+\frac{4^3-4}{\text{sh}^24a}+\frac{5^3-5}{\text{sh}^25a}+\cdot\cdot\right) \text{ ----<S6-3>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow\pm0}\frac{16a^3}{7}\left(\frac{1^2}{\text{sh}2a}+\frac{2^2}{\text{sh}4a}+\frac{3^2}{\text{sh}6a}+\frac{4^2}{\text{sh}8a}+\cdot\cdot\right) \text{ ----<S6-4>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{16a^3}{3}\left(\frac{1^2}{e^{2a}+1}+\frac{2^2}{e^{4a}+1}+\frac{3^2}{e^{6a}+1}+\frac{4^2}{e^{8a}+1}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S6-5>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{8a^2}{3}\log\left((1+e^{-a})(1+e^{-3a})^3(1+e^{-5a})^5(1+e^{-7a})^7\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S6-6>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}4a^2\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-2a})(1-e^{-4a})^2(1-e^{-6a})^3(1-e^{-8a})^4\cdot\cdot}\right) \quad \text{---<S6-7>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{16a^2}{3}\log\left((1+e^{-2a})(1+e^{-4a})^2(1+e^{-6a})^3(1+e^{-8a})^4\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S6-8>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}2a^2\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-3a})^3(1-e^{-5a})^5(1-e^{-7a})^7\cdot\cdot}\right) \quad \text{---<S6-9>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{4a^3}{3}\left(\frac{1^2}{e^a+1}+\frac{3^2}{e^{3a}+1}+\frac{5^2}{e^{5a}+1}+\frac{7^2}{e^{7a}+1}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S6-10>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}a^3\left(\frac{1^2}{e^a-1}+\frac{3^2}{e^{3a}-1}+\frac{5^2}{e^{5a}-1}+\frac{7^2}{e^{7a}-1}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S6-11>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow\pm0}\frac{4a^3}{7}\left(\frac{1^2}{\text{sha}}+\frac{3^2}{\text{sh}3a}+\frac{5^2}{\text{sh}5a}+\frac{7^2}{\text{sh}7a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S6-12>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{16a^2}{7}\left(\text{th}^{-1}(e^{-a})+3\text{th}^{-1}(e^{-3a})+5\text{th}^{-1}(e^{-5a})+7\text{th}^{-1}(e^{-7a})+\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S6-13>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow\pm0}\frac{8a^2}{7}\left(\text{th}^{-1}\left(\frac{1}{\text{cha}}\right)+3\text{th}^{-1}\left(\frac{1}{\text{ch}3a}\right)+5\text{th}^{-1}\left(\frac{1}{\text{ch}5a}\right)+7\text{th}^{-1}\left(\frac{1}{\text{ch}7a}\right)+\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S6-14>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow\pm0}\frac{4a^4}{3}\left(\frac{3^3-3}{\text{sh}^2 3a}+\frac{5^3-5}{\text{sh}^2 5a}+\frac{7^3-7}{\text{sh}^2 7a}+\frac{9^3-9}{\text{sh}^2 9a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S6-15>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{8a^2}{3}\log(2(1+e^{-2a})^3(1+e^{-4a})^5(1+e^{-6a})^7\cdot\cdot) \quad \text{----<S6-16>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{8a^2}{3}\log\left((1+e^{-2a})(1+e^{-4a})^3(1+e^{-6a})^5(1+e^{-8a})^7\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S6-17>}$$

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{8a^2}{3} \log \left((1 + e^a)(1 + e^{-a})^3(1 + e^{-3a})^5(1 + e^{-5a})^7 \cdot \cdot \right) \quad \text{---<S6-18>}$$

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{8a^2}{3} \log \left((1 + e^{-3a})(1 + e^{-5a})^3(1 + e^{-7a})^5(1 + e^{-9a})^7 \cdot \cdot \right) \quad \text{---<S6-19>}$$

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{16a^2}{3} \log \left((1 + e^{-a})(1 + e^{-3a})^2(1 + e^{-5a})^3(1 + e^{-7a})^4 \cdot \cdot \right) \quad \text{---<S6-20>}$$

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{16a^2}{3} \log \left((1 + e^{-3a})(1 + e^{-5a})^2(1 + e^{-7a})^3(1 + e^{-9a})^4 \cdot \cdot \right) \quad \text{---<S6-21>}$$

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{16a^2}{3} \log \left(2(1 + e^{-2a})^2(1 + e^{-4a})^3(1 + e^{-6a})^4(1 + e^{-8a})^5 \cdot \cdot \right) \quad \text{---<S6-22>}$$

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{16a^2}{3} \log \left((1 + e^a)(1 + e^{-a})^2(1 + e^{-3a})^3(1 + e^{-5a})^4 \cdot \cdot \right) \quad \text{---<S6-23>}$$

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} \frac{8a^4}{9} \left(\frac{1^3}{\text{ch}^2 a} + \frac{2^3}{\text{ch}^2 2a} + \frac{3^3}{\text{ch}^2 3a} + \frac{4^3}{\text{ch}^2 4a} + \cdot \cdot \right) \quad \text{----<S6-24>}$$

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} \frac{2a^4}{3} \left(\frac{1^3}{\text{sh}^2 a} + \frac{2^3}{\text{sh}^2 2a} + \frac{3^3}{\text{sh}^2 3a} + \frac{4^3}{\text{sh}^2 4a} + \cdot \cdot \right) \quad \text{----<S6-25>}$$

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{a^3}{2} \left(\frac{1^2}{e^a - 1} + \frac{2^2}{e^{2a} - 1} + \frac{3^2}{e^{3a} - 1} + \frac{4^2}{e^{4a} - 1} + \cdot \cdot \right) \quad \text{----<S6-26>}$$

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} \frac{2a^4}{21} \left(\frac{3 \times 2 \times 1 \text{ch} 4a}{\text{sh}^2 4a} + \frac{4 \times 3 \times 2 \text{ch} 5a}{\text{sh}^2 5a} + \frac{5 \times 4 \times 3 \text{ch} 6a}{\text{sh}^2 6a} + \frac{6 \times 5 \times 4 \text{ch} 7a}{\text{sh}^2 7a} + \cdot \cdot \right) \quad \text{----<S6-27>}$$

◆ $\frac{\pi^3}{32}$ 極限公式 (L(3) 極限公式)

$$\frac{\pi^3}{32} = \lim_{a \rightarrow +0} 2a^3 \left(\frac{1^2}{\text{ch} 2a} + \frac{2^2}{\text{ch} 4a} + \frac{3^2}{\text{ch} 6a} + \frac{4^2}{\text{ch} 8a} + \cdot \cdot \right) \quad \text{-----<S7-1>}$$

$$\frac{\pi^3}{32} = \lim_{a \rightarrow +0} 2a^2 \left(\tan^{-1}(e^{-a}) + 3 \tan^{-1}(e^{-3a}) + 5 \tan^{-1}(e^{-5a}) + 7 \tan^{-1}(e^{-7a}) + \cdot \cdot \right) \quad \text{--<S7-2>}$$

$$\frac{\pi^3}{32} = \lim_{a \rightarrow +0} a^2 \left(\tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sha}} \right) + 3 \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh} 3a} \right) + 5 \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh} 5a} \right) + 7 \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh} 7a} \right) + \cdot \cdot \right) \quad \text{--<S7-3>}$$

$$\frac{\pi^3}{32} = \lim_{a \rightarrow +0} a^2 \left(\tan^{-1} \left(\frac{\text{cha}}{\text{sha}} \right) + 3 \tan^{-1} \left(\frac{\text{cha}}{\text{sh3a}} \right) + 5 \tan^{-1} \left(\frac{\text{cha}}{\text{sh5a}} \right) + 7 \tan^{-1} \left(\frac{\text{cha}}{\text{sh7a}} \right) + \cdot \cdot \right) \text{ --<S7-4>}$$

$$\frac{\pi^3}{32} = \lim_{a \rightarrow +0} 2a^2 \left(\tan^{-1}(e^{-2a}) + 3 \tan^{-1}(e^{-4a}) + 5 \tan^{-1}(e^{-6a}) + 7 \tan^{-1}(e^{-8a}) + \cdot \cdot \right) \text{ --<S7-5>}$$

$$\frac{\pi^3}{32} = \lim_{a \rightarrow +0} 2a^2 \left(\tan^{-1}(1) + 3 \tan^{-1}(e^{-2a}) + 5 \tan^{-1}(e^{-4a}) + 7 \tan^{-1}(e^{-6a}) + \cdot \cdot \right) \text{ --<S7-6>}$$

$$\frac{\pi^3}{32} = \lim_{a \rightarrow +0} 2a^2 \left(\tan^{-1}(e^a) + 3 \tan^{-1}(e^{-a}) + 5 \tan^{-1}(e^{-3a}) + 7 \tan^{-1}(e^{-5a}) + \cdot \cdot \right) \text{ --<S7-7>}$$

$$\frac{\pi^3}{32} = \lim_{a \rightarrow +0} 2a^3 \left(\frac{2 \times 1}{\text{ch5a}} + \frac{3 \times 2}{\text{ch7a}} + \frac{4 \times 3}{\text{ch9a}} + \frac{5 \times 4}{\text{ch11a}} + \frac{6 \times 5}{\text{ch13a}} + \frac{7 \times 6}{\text{ch15a}} + \cdot \cdot \right) \text{ --<S7-8>}$$

$$\frac{\pi^3}{32} = \lim_{a \rightarrow +0} 4a^3 \left(\frac{2 \times 1 \text{ch5a}}{\text{ch10a+cha}} + \frac{3 \times 2 \text{ch7a}}{\text{ch14a+cha}} + \frac{4 \times 3 \text{ch9a}}{\text{ch18a+cha}} + \frac{5 \times 4 \text{ch11a}}{\text{ch22a+cha}} + \cdot \cdot \right) \text{ ---<S7-9>}$$

$$\frac{\pi^3}{32} = \lim_{a \rightarrow +0} 2a^2 \left(\tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh3a}} \right) + 2 \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh5a}} \right) + 3 \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh7a}} \right) + 4 \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh9a}} \right) + \cdot \cdot \right) \text{ --<S7-10>}$$

$$\frac{\pi^3}{32} = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{a^3}{4} \left(\frac{2 \times 1}{\text{ch3a}} + \frac{3 \times 2}{\text{ch4a}} + \frac{4 \times 3}{\text{ch5a}} + \frac{5 \times 4}{\text{ch6a}} + \frac{6 \times 5}{\text{ch7a}} + \frac{7 \times 6}{\text{ch8a}} + \cdot \cdot \right) \text{ ---<S7-11>}$$

◆L(4)極限公式

$$L(4) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} \frac{2a^4}{3} \left(\frac{1 \times 2 \times 3}{\text{ch3a}} + \frac{2 \times 3 \times 5}{\text{ch5a}} + \frac{3 \times 4 \times 7}{\text{ch7a}} + \frac{4 \times 5 \times 9}{\text{ch9a}} + \frac{5 \times 6 \times 11}{\text{ch11a}} + \frac{6 \times 7 \times 13}{\text{ch13a}} + \cdot \cdot \right) \text{ --<S12-1>}$$

$$L(4) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} \frac{4a^4}{3} \left(\frac{3 \times 2 \times 1}{\text{ch7a}} + \frac{4 \times 3 \times 2}{\text{ch9a}} + \frac{5 \times 4 \times 3}{\text{ch11a}} + \frac{6 \times 5 \times 4}{\text{ch13a}} + \frac{7 \times 6 \times 5}{\text{ch15a}} + \frac{8 \times 7 \times 6}{\text{ch17a}} + \cdot \cdot \right) \text{ --<S12-2>}$$

$$L(4) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} \frac{8a^4}{3} \left(\frac{3 \times 2 \times 1 \text{ch7a}}{\text{ch14a+cha}} + \frac{4 \times 3 \times 2 \text{ch9a}}{\text{ch18a+cha}} + \frac{5 \times 4 \times 3 \text{ch11a}}{\text{ch22a+cha}} + \frac{6 \times 5 \times 4 \text{ch13a}}{\text{ch26a+cha}} + \cdot \cdot \right) \text{ --<S12-3>}$$

$$L(4) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} 2a^3 \left(2 \times 1 \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh5a}} \right) + 3 \times 2 \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh7a}} \right) + 4 \times 3 \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh9a}} \right) + 5 \times 4 \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh11a}} \right) + \cdot \cdot \right) \text{ --<S12-4>}$$

$$L(4) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} \frac{2a^4}{3} \left(\frac{1 \times 3 \times 4}{\text{ch4a}} + \frac{2 \times 4 \times 6}{\text{ch6a}} + \frac{3 \times 5 \times 8}{\text{ch8a}} + \frac{4 \times 6 \times 10}{\text{ch10a}} + \cdot \cdot \right) \text{ -----<S12-5>}$$

$$L(4)=\lim_{a\rightarrow\pm0}\frac{a^4}{12}\left(\frac{3\times2\times1}{\text{ch}4a}+\frac{4\times3\times2}{\text{ch}5a}+\frac{5\times4\times3}{\text{ch}6a}+\frac{6\times5\times4}{\text{ch}7a}+\frac{7\times6\times5}{\text{ch}8a}+\frac{8\times7\times6}{\text{ch}9a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S12-6>}$$

◆ $\frac{\pi^4}{90}$ 極限公式　（ζ (4) 極限公式）

$$\frac{\pi^4}{90}=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{32a^4}{45}\left(\frac{1\times2\times3}{\text{sh}3a}+\frac{2\times3\times5}{\text{sh}5a}+\frac{3\times4\times7}{\text{sh}7a}+\frac{4\times5\times9}{\text{sh}9a}+\frac{5\times6\times11}{\text{sh}11a}+\frac{6\times7\times13}{\text{sh}13a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S13-1>}$$

$$\frac{\pi^4}{90}=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{8a^5}{21}\left(\frac{1^4}{\text{ch}^2a}+\frac{2^4}{\text{ch}^22a}+\frac{3^4}{\text{ch}^23a}+\frac{4^4}{\text{ch}^24a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----<S13-2>}$$

$$\frac{\pi^4}{90}=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{a^5}{3}\left(\frac{1^4}{\text{sh}^2a}+\frac{2^4}{\text{sh}^22a}+\frac{3^4}{\text{sh}^23a}+\frac{4^4}{\text{sh}^24a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----<S13-3>}$$

$$\frac{\pi^4}{90}=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{a^5}{45}\left(\frac{4\times3\times2\times1\text{ch}5a}{\text{sh}^25a}+\frac{5\times4\times3\times2\text{ch}6a}{\text{sh}^26a}+\frac{6\times5\times4\times3\text{ch}7a}{\text{sh}^27a}+\frac{7\times6\times5\times4\text{ch}8a}{\text{sh}^28a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S13-4>}$$

◆ $\frac{5\pi^5}{1536}$ 極限公式　（L (5) 極限公式）

$$\frac{5\pi^5}{1536}=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{2a^5}{3}\left(\frac{4\times3\times2\times1}{\text{ch}9a}+\frac{5\times4\times3\times2}{\text{ch}11a}+\frac{6\times5\times4\times3}{\text{ch}13a}+\frac{7\times6\times5\times4}{\text{ch}15a}+\frac{8\times7\times6\times5}{\text{ch}17a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S14-1>}$$

$$\frac{5\pi^5}{1536}=\lim_{a\rightarrow\pm0}\frac{4a^4}{3}\left(3\times2\times1\tan^{-1}\left(\frac{1}{\text{sh}7a}\right)+4\times3\times2\tan^{-1}\left(\frac{1}{\text{sh}9a}\right)+5\times4\times3\tan^{-1}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\text{sh}11a}\right)+6\times5\times4\tan^{-1}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\text{sh}13a}\right)+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----<S14-2>}$$

$$\frac{5\pi^5}{1536}=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{2a^5}{3}\left(\frac{4\times3\times2\times1}{\text{ch}10a}+\frac{5\times4\times3\times2}{\text{ch}12a}+\frac{6\times5\times4\times3}{\text{ch}14a}+\frac{7\times6\times5\times4}{\text{ch}16a}+\frac{8\times7\times6\times5}{\text{ch}18a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S14-3>}$$

=====

上記の六つの青色式が得られた。Wolfram Alpha での数値検証でも式の成立を確認している。
紙幅の関係から証明は略すが、その証明はこれまでに示してきた証明と類似のものとなる。

最後に、気になる点や思うことなど述べておく。

=====

●次の三式を眺めよう。

$$L(2)=\lim_{a\rightarrow\pm0}a^2\left(\frac{2}{\text{ch}2a}+\frac{4}{\text{ch}4a}+\frac{6}{\text{ch}6a}+\frac{8}{\text{ch}8a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S1-2>}$$

$$L(2) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} a^2 \left(\frac{1}{\text{cha}} + \frac{3}{\text{ch3a}} + \frac{5}{\text{ch5a}} + \frac{7}{\text{ch7a}} + \cdot \cdot \right) \quad \text{----<S1-3>}$$

$$L(2) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} \frac{a^2}{2} \left(\frac{1}{\text{ch2a}} + \frac{2}{\text{ch3a}} + \frac{3}{\text{ch4a}} + \frac{4}{\text{ch5a}} + \cdot \cdot \right) \quad \text{----<S1-14>}$$

これらは似てはいるが、ちょっとずつ違って面白。

●次を眺めよう。

$$L(4) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} \frac{4a^4}{3} \left(\frac{3 \times 2 \times 1}{\text{ch7a}} + \frac{4 \times 3 \times 2}{\text{ch9a}} + \frac{5 \times 4 \times 3}{\text{ch11a}} + \frac{6 \times 5 \times 4}{\text{ch13a}} + \frac{7 \times 6 \times 5}{\text{ch15a}} + \frac{8 \times 7 \times 6}{\text{ch17a}} + \cdot \cdot \right) \quad \text{--<S12-2>}$$

$$L(4) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} \frac{a^4}{12} \left(\frac{3 \times 2 \times 1}{\text{ch4a}} + \frac{4 \times 3 \times 2}{\text{ch5a}} + \frac{5 \times 4 \times 3}{\text{ch6a}} + \frac{6 \times 5 \times 4}{\text{ch7a}} + \frac{7 \times 6 \times 5}{\text{ch8a}} + \frac{8 \times 7 \times 6}{\text{ch9a}} + \cdot \cdot \right) \quad \text{--<S12-6>}$$

ふしぎな感じがある。

●次はどうか。

$$\frac{\pi^3}{32} = \lim_{a \rightarrow +0} 2a^3 \left(\frac{2 \times 1}{\text{ch5a}} + \frac{3 \times 2}{\text{ch7a}} + \frac{4 \times 3}{\text{ch9a}} + \frac{5 \times 4}{\text{ch11a}} + \frac{6 \times 5}{\text{ch13a}} + \frac{7 \times 6}{\text{ch15a}} + \cdot \cdot \right) \quad \text{--<S7-8>}$$

$$\frac{\pi^3}{32} = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{a^3}{4} \left(\frac{2 \times 1}{\text{ch3a}} + \frac{3 \times 2}{\text{ch4a}} + \frac{4 \times 3}{\text{ch5a}} + \frac{5 \times 4}{\text{ch6a}} + \frac{6 \times 5}{\text{ch7a}} + \frac{7 \times 6}{\text{ch8a}} + \cdot \cdot \right) \quad \text{----<S7-11>}$$

これも Good。

●次は・・・

$$\frac{5\pi^5}{1536} = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{2a^5}{3} \left(\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{\text{ch9a}} + \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{\text{ch11a}} + \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{\text{ch13a}} + \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{\text{ch15a}} + \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{\text{ch17a}} + \cdot \cdot \right) \quad \text{--<S14-1>}$$

$$\frac{5\pi^5}{1536} = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{2a^5}{3} \left(\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{\text{ch10a}} + \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{\text{ch12a}} + \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{\text{ch14a}} + \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{\text{ch16a}} + \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{\text{ch18a}} + \cdot \cdot \right) \quad \text{--<S14-3>}$$

これは本当にふしぎで、そして美しい。これはなんなのだろうか？

●極限公式は単体でもきれいな式が多いが、たくさん出てくると、このように比較ができるのがよい。それらは兄弟や家族を形成しているかのような印象があって、比べ合うことでさらに味わいが増す。

=====

2025. 11. 1 杉岡幹生

sugioka_m@mvp.biglobe.ne.jp

<参考文献>

・「マグロウヒル 数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)