

＜ 三角関数と双曲線関数の融合域（その５２） ＞

極限公式を新たに１０個見出したので下方に青色式で示す。なお、同公式は多く出すぎたため、今回のものに
関係ないグループは略した。関係のあるグループは過去のをすべて示した。

以降において、 $L(2) \sim L(5)$ 、 $\zeta(2)$ は次の通り。

$$L(2) = 1 - 1/3^2 + 1/5^2 - 1/7^2 + \dots = \text{非明示（カタランの定数）}$$

$$L(3) \text{ は } L(3) = 1 - 1/3^3 + 1/5^3 - 1/7^3 + \dots = \pi^3/32$$

$$L(4) = 1 - 1/3^4 + 1/5^4 - 1/7^4 + \dots = \text{非明示}$$

$$L(5) \text{ は } L(5) = 1 - 1/3^5 + 1/5^5 - 1/7^5 + \dots = 5\pi^5/1536$$

$$\zeta(2) = 1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + \dots = \pi^2/6$$

$$(3/4)\zeta(2) = 1 + 1/3^2 + 1/5^2 + 1/7^2 + \dots = \pi^2/8 \quad (\text{一つ上と実質は同じ})$$

以降では、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は $\sinh(2a)$ のことである。a は任意の実数である。 $\tan^{-1}$ 、 th^{-1} はそれぞれ $\arctan$, arctanh である。log は自然対数、e は自然対数の底。sin, cos, tan は通常の表記である。

なお、lim での $a \rightarrow +0$ は a をプラス側から 0 に近づける意味であり、 $a \rightarrow \pm 0$ は a をプラス側, マイナス側 どちらから 0 に近づけても OK の意味である。

=====

＜ 極限公式 ＞

◆ $\frac{\pi^2}{8}$ 極限公式 (3 $\zeta(2)$ / 4 極限公式)

$$\frac{\pi^2}{8} = \lim_{a \rightarrow +0} a \cdot \log \left(\frac{1}{\text{th}a \cdot \text{th}2a \cdot \text{th}3a \cdot \text{th}4a \cdots} \right) \quad \text{----} \langle S2-1 \rangle$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \lim_{a \rightarrow +0} 2a \cdot \log \left(\frac{1}{\text{th}a \cdot \text{th}3a \cdot \text{th}5a \cdot \text{th}7a \cdots} \right) \quad \text{----} \langle S2-2 \rangle$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \lim_{a \rightarrow +0} a^2 \left(\frac{2}{\text{sh}2a} + \frac{4}{\text{sh}4a} + \frac{6}{\text{sh}6a} + \frac{8}{\text{sh}8a} + \dots \right) \quad \text{----} \langle S2-3 \rangle$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \lim_{a \rightarrow +0} a^2 \left(\frac{1}{\text{sh}a} + \frac{3}{\text{sh}3a} + \frac{5}{\text{sh}5a} + \frac{7}{\text{sh}7a} + \dots \right) \quad \text{----} \langle S2-4 \rangle$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{a^2}{2} \left(\frac{1}{\text{sh}2a} + \frac{2}{\text{sh}3a} + \frac{3}{\text{sh}4a} + \frac{4}{\text{sh}5a} + \dots \right) \quad \text{----} \langle S2-5 \rangle$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \lim_{a \rightarrow +0} a \cdot \log \left(\left(\frac{\text{ch}2a + \text{cha}}{\text{ch}2a - \text{cha}} \right) \left(\frac{\text{ch}6a + \text{cha}}{\text{ch}6a - \text{cha}} \right) \left(\frac{\text{ch}10a + \text{cha}}{\text{ch}10a - \text{cha}} \right) \left(\frac{\text{ch}14a + \text{cha}}{\text{ch}14a - \text{cha}} \right) \cdots \right) \quad \text{---<S2-6>}$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \lim_{a \rightarrow +0} \left(\frac{a}{2} \right) \log \left(\left(\frac{\text{cha} + \text{cosa}}{\text{cha} - \text{cosa}} \right) \left(\frac{\text{ch}3a + \text{cosa}}{\text{ch}3a - \text{cosa}} \right) \left(\frac{\text{ch}5a + \text{cosa}}{\text{ch}5a - \text{cosa}} \right) \left(\frac{\text{ch}7a + \text{cosa}}{\text{ch}7a - \text{cosa}} \right) \cdots \right) \quad \text{---<S2-7>}$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \lim_{a \rightarrow +0} a \cdot \log \left(\left(\frac{\text{ch}4a + \text{cha}}{\text{ch}4a - \text{cha}} \right) \left(\frac{\text{ch}8a + \text{cha}}{\text{ch}8a - \text{cha}} \right) \left(\frac{\text{ch}12a + \text{cha}}{\text{ch}12a - \text{cha}} \right) \left(\frac{\text{ch}16a + \text{cha}}{\text{ch}16a - \text{cha}} \right) \cdots \right) \quad \text{---<S2-8>}$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \lim_{a \rightarrow +0} a \left(\tan^{-1} \left(\frac{\text{sina}}{\text{sha}} \right) + 3 \tan^{-1} \left(\frac{\text{sina}}{\text{sh}3a} \right) + 5 \tan^{-1} \left(\frac{\text{sina}}{\text{sh}5a} \right) + 7 \tan^{-1} \left(\frac{\text{sina}}{\text{sh}7a} \right) + \cdots \right) \quad \text{--<S2-9>}$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \lim_{a \rightarrow +0} 4a \left(\text{th}^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{sh}2a} \right) + 3 \text{th}^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{sh}6a} \right) + 5 \text{th}^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{sh}10a} \right) + 7 \text{th}^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{sh}14a} \right) + \cdots \right) \quad \text{--<S2-10>}$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \lim_{a \rightarrow +0} 9a \left(\text{th}^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{sh}3a} \right) + 3 \text{th}^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{sh}9a} \right) + 5 \text{th}^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{sh}15a} \right) + 7 \text{th}^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{sh}21a} \right) + \cdots \right) \quad \text{--<S2-11>}$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \lim_{a \rightarrow +0} 16a \left(\text{th}^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{sh}4a} \right) + 3 \text{th}^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{sh}12a} \right) + 5 \text{th}^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{sh}20a} \right) + 7 \text{th}^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{sh}28a} \right) + \cdots \right) \quad \text{--<S2-12>}$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \lim_{a \rightarrow +0} 2a \left(\text{th}^{-1} \left(\frac{1}{e^a} \right) + \text{th}^{-1} \left(\frac{1}{e^{3a}} \right) + \text{th}^{-1} \left(\frac{1}{e^{5a}} \right) + \text{th}^{-1} \left(\frac{1}{e^{7a}} \right) + \cdots \right) \quad \text{--<S2-13>}$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{a^3}{4} \left(\frac{2 \times 1 \text{ch}3a}{\text{sh}^2 3a} + \frac{3 \times 2 \text{ch}4a}{\text{sh}^2 4a} + \frac{4 \times 3 \text{ch}5a}{\text{sh}^2 5a} + \frac{5 \times 4 \text{ch}6a}{\text{sh}^2 6a} + \cdots \right) \quad \text{---<S2-14>}$$

◆L(2)極限公式

$$L(2) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} a \left(\tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sha}} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh}3a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh}5a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh}7a} \right) + \cdots \right) \quad \text{---<S1>}$$

$$L(2) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} a^2 \left(\frac{2}{\text{ch}2a} + \frac{4}{\text{ch}4a} + \frac{6}{\text{ch}6a} + \frac{8}{\text{ch}8a} + \cdots \right) \quad \text{----<S1-2>}$$

$$L(2) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} a^2 \left(\frac{1}{\text{cha}} + \frac{3}{\text{ch}3a} + \frac{5}{\text{ch}5a} + \frac{7}{\text{ch}7a} + \cdots \right) \quad \text{----<S1-3>}$$

$$L(2) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} a \left(\tan^{-1} \left(\frac{\text{cha}}{\text{sha}} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{cha}}{\text{sh}3a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{cha}}{\text{sh}5a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{cha}}{\text{sh}7a} \right) + \cdots \right) \quad \text{--<S1-4>}$$

$$L(2) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} 2a \left(\tan^{-1} \left(\frac{\text{cha}}{\text{sh}2a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{cha}}{\text{sh}6a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{cha}}{\text{sh}10a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{cha}}{\text{sh}14a} \right) + \cdots \right) \quad \text{--<S1-5>}$$

$$L(2)=\lim_{a\rightarrow\pm 0}a\left(\tan^{-1}\left(\frac{\cos a}{\sin a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\cos a}{\sin 3a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\cos a}{\sin 5a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\cos a}{\sin 7a}\right)+\cdot\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S1-6>}$$

$$L(2)=\lim_{a\rightarrow\pm 0}a\left(\tan^{-1}\left(\frac{\sin a}{\cos a}\right)+3\tan^{-1}\left(\frac{\sin a}{\cos 3a}\right)+5\tan^{-1}\left(\frac{\sin a}{\cos 5a}\right)+7\tan^{-1}\left(\frac{\sin a}{\cos 7a}\right)+\cdot\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S1-7>}$$

$$L(2)=\lim_{a\rightarrow\pm 0}a\left(\operatorname{th}^{-1}\left(\frac{\sin a}{\cos a}\right)+3\operatorname{th}^{-1}\left(\frac{\sin a}{\cos 3a}\right)+5\operatorname{th}^{-1}\left(\frac{\sin a}{\cos 5a}\right)+7\operatorname{th}^{-1}\left(\frac{\sin a}{\cos 7a}\right)+\cdot\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S1-8>}$$

$$L(2)=\lim_{a\rightarrow\pm 0}2a\left(\tan^{-1}\left(\frac{\sin a}{\sin 4a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\sin a}{\sin 8a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\sin a}{\sin 12a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\sin a}{\sin 16a}\right)+\cdot\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S1-9>}$$

$$L(2)=\lim_{a\rightarrow\pm 0}2a^2\left(\frac{1}{\sin 3a}+\frac{2}{\sin 5a}+\frac{3}{\sin 7a}+\frac{4}{\sin 9a}+\frac{5}{\sin 11a}+\frac{6}{\sin 13a}+\cdot\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S1-10>}$$

$$L(2)=\lim_{a\rightarrow\pm 0}\frac{a}{2}\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sin a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sin 2a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sin 3a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sin 4a}\right)+\cdot\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S1-11>}$$

$$L(2)=\lim_{a\rightarrow+0}2a\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{e^a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{e^{3a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{e^{5a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{e^{7a}}\right)+\cdot\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S1-12>}$$

$$L(2)=\lim_{a\rightarrow+0}a\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{e^a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{e^{2a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{e^{3a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{e^{4a}}\right)+\cdot\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S1-13>}$$

◆log2 極限公式

$$\log 2=\lim_{a\rightarrow+0}a\left(\frac{1}{e^a+1}+\frac{1}{e^{2a}+1}+\frac{1}{e^{3a}+1}+\frac{1}{e^{4a}+1}+\cdot\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S5-1>}$$

$$\log 2=\lim_{a\rightarrow+0}2a\left(\frac{1}{e^a+1}+\frac{1}{e^{3a}+1}+\frac{1}{e^{5a}+1}+\frac{1}{e^{7a}+1}+\cdot\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S5-2>}$$

$$\log 2=\lim_{a\rightarrow\pm 0}2a^2\left(\frac{1}{\cosh^2 a}+\frac{3}{\cosh^2 3a}+\frac{5}{\cosh^2 5a}+\frac{7}{\cosh^2 7a}+\cdot\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S5-3>}$$

$$\log 2=\lim_{a\rightarrow\pm 0}a^2\left(\frac{1}{\cosh^2 a}+\frac{2}{\cosh^2 2a}+\frac{3}{\cosh^2 3a}+\frac{4}{\cosh^2 4a}+\cdot\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S5-4>}$$

$$\log 2=\lim_{a\rightarrow+0}2a\left(\sin a\cdot\log\left(\frac{\cosh a}{\sin a}\right)+\sin 3a\cdot\log\left(\frac{\cosh 3a}{\sin 3a}\right)+\sin 5a\cdot\log\left(\frac{\cosh 5a}{\sin 5a}\right)+\cdot\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S5-5>}$$

$$\log 2 = \lim_{a \rightarrow +0} a \left(\text{sha} \cdot \log \left(\frac{\text{cha}}{\text{sha}} \right) + \text{sh2a} \cdot \log \left(\frac{\text{ch2a}}{\text{sh2a}} \right) + \text{sh3a} \cdot \log \left(\frac{\text{ch3a}}{\text{sh3a}} \right) + \cdot \cdot \right) \text{ --<S5-6>}$$

$$\log 2 = \lim_{a \rightarrow +0} 2a \left(\frac{e^{-2a} + \text{cha}}{\text{ch2a} + \text{cha}} + \frac{e^{-6a} + \text{cha}}{\text{ch6a} + \text{cha}} + \frac{e^{-10a} + \text{cha}}{\text{ch10a} + \text{cha}} + \frac{e^{-14a} + \text{cha}}{\text{ch14a} + \text{cha}} + \cdot \cdot \right) \text{ ---<S5-7>}$$

$$\log 2 = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{a}{2} \left(\frac{1}{e^a} \cdot \text{th}^{-1} \left(\frac{1}{\text{cha}} \right) + \frac{1}{e^{2a}} \cdot \text{th}^{-1} \left(\frac{1}{\text{ch2a}} \right) + \frac{1}{e^{3a}} \cdot \text{th}^{-1} \left(\frac{1}{\text{ch3a}} \right) + \frac{1}{e^{4a}} \cdot \text{th}^{-1} \left(\frac{1}{\text{ch4a}} \right) + \cdot \cdot \right) \text{ --<S5-8>}$$

$$\log 2 = \lim_{a \rightarrow \pm 0} a^3 \left(\frac{1^2 \text{sha}}{\text{ch}^3 a} + \frac{2^2 \text{sh2a}}{\text{ch}^3 2a} + \frac{3^2 \text{sh3a}}{\text{ch}^3 3a} + \frac{4^2 \text{sh4a}}{\text{ch}^3 4a} + \cdot \cdot \right) \text{ ----<S5-9>}$$

$$\log 2 = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{a}{2} \left(\left(1 - \frac{\text{sha}}{\text{cha}+1} \right) + \left(1 - \frac{\text{sh2a}}{\text{ch2a}+1} \right) + \left(1 - \frac{\text{sh3a}}{\text{ch3a}+1} \right) + \left(1 - \frac{\text{sh4a}}{\text{ch4a}+1} \right) + \cdot \cdot \right) \text{ --<S5-10>}$$

$$\log 2 = \lim_{a \rightarrow +0} a \left(\left(1 - \frac{\text{sha}}{\text{cha}+1} \right) + \left(1 - \frac{\text{sh3a}}{\text{ch3a}+1} \right) + \left(1 - \frac{\text{sh5a}}{\text{ch5a}+1} \right) + \left(1 - \frac{\text{sh7a}}{\text{ch7a}+1} \right) + \cdot \cdot \right) \text{ --<S5-11>}$$

◆ $\frac{\pi^3}{32}$ 極限公式 (L(3) 極限公式)

$$\frac{\pi^3}{32} = \lim_{a \rightarrow +0} 2a^3 \left(\frac{1^2}{\text{ch2a}} + \frac{2^2}{\text{ch4a}} + \frac{3^2}{\text{ch6a}} + \frac{4^2}{\text{ch8a}} + \cdot \cdot \right) \text{ -----<S7-1>}$$

$$\frac{\pi^3}{32} = \lim_{a \rightarrow +0} 2a^2 \left(\tan^{-1}(e^{-a}) + 3\tan^{-1}(e^{-3a}) + 5\tan^{-1}(e^{-5a}) + 7\tan^{-1}(e^{-7a}) + \cdot \cdot \right) \text{ --<S7-2>}$$

$$\frac{\pi^3}{32} = \lim_{a \rightarrow +0} a^2 \left(\tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sha}} \right) + 3\tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh3a}} \right) + 5\tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh5a}} \right) + 7\tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh7a}} \right) + \cdot \cdot \right) \text{ --<S7-3>}$$

$$\frac{\pi^3}{32} = \lim_{a \rightarrow +0} a^2 \left(\tan^{-1} \left(\frac{\text{cha}}{\text{sha}} \right) + 3\tan^{-1} \left(\frac{\text{cha}}{\text{sh3a}} \right) + 5\tan^{-1} \left(\frac{\text{cha}}{\text{sh5a}} \right) + 7\tan^{-1} \left(\frac{\text{cha}}{\text{sh7a}} \right) + \cdot \cdot \right) \text{ --<S7-4>}$$

$$\frac{\pi^3}{32} = \lim_{a \rightarrow +0} 2a^2 \left(\tan^{-1}(e^{-2a}) + 3\tan^{-1}(e^{-4a}) + 5\tan^{-1}(e^{-6a}) + 7\tan^{-1}(e^{-8a}) + \cdot \cdot \right) \text{ --<S7-5>}$$

$$\frac{\pi^3}{32} = \lim_{a \rightarrow +0} 2a^2 \left(\tan^{-1}(1) + 3\tan^{-1}(e^{-2a}) + 5\tan^{-1}(e^{-4a}) + 7\tan^{-1}(e^{-6a}) + \cdot \cdot \right) \text{ --<S7-6>}$$

$$\frac{\pi^3}{32} = \lim_{a \rightarrow +0} 2a^2 \left(\tan^{-1}(e^a) + 3\tan^{-1}(e^{-a}) + 5\tan^{-1}(e^{-3a}) + 7\tan^{-1}(e^{-5a}) + \cdot \cdot \right) \text{ --<S7-7>}$$

$$\frac{\pi^3}{32} = \lim_{a \rightarrow +0} 2a^3 \left(\frac{2 \times 1}{\text{ch}5a} + \frac{3 \times 2}{\text{ch}7a} + \frac{4 \times 3}{\text{ch}9a} + \frac{5 \times 4}{\text{ch}11a} + \frac{6 \times 5}{\text{ch}13a} + \frac{7 \times 6}{\text{ch}15a} + \cdot \cdot \right) \quad \text{--<S7-8>}$$

$$\frac{\pi^3}{32} = \lim_{a \rightarrow +0} 4a^3 \left(\frac{2 \times 1 \text{ch}5a}{\text{ch}10a + \text{cha}} + \frac{3 \times 2 \text{ch}7a}{\text{ch}14a + \text{cha}} + \frac{4 \times 3 \text{ch}9a}{\text{ch}18a + \text{cha}} + \frac{5 \times 4 \text{ch}11a}{\text{ch}22a + \text{cha}} + \cdot \cdot \right) \quad \text{---<S7-9>}$$

$$\frac{\pi^3}{32} = \lim_{a \rightarrow +0} 2a^2 \left(\tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh}3a} \right) + 2 \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh}5a} \right) + 3 \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh}7a} \right) + 4 \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh}9a} \right) + \cdot \cdot \right) \quad \text{--<S7-10>}$$

◆L(4)極限公式

$$L(4) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} \frac{2a^4}{3} \left(\frac{1 \times 2 \times 3}{\text{ch}3a} + \frac{2 \times 3 \times 5}{\text{ch}5a} + \frac{3 \times 4 \times 7}{\text{ch}7a} + \frac{4 \times 5 \times 9}{\text{ch}9a} + \frac{5 \times 6 \times 11}{\text{ch}11a} + \frac{6 \times 7 \times 13}{\text{ch}13a} + \cdot \cdot \right) \quad \text{--<S12-1>}$$

$$L(4) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} \frac{4a^4}{3} \left(\frac{3 \times 2 \times 1}{\text{ch}7a} + \frac{4 \times 3 \times 2}{\text{ch}9a} + \frac{5 \times 4 \times 3}{\text{ch}11a} + \frac{6 \times 5 \times 4}{\text{ch}13a} + \frac{7 \times 6 \times 5}{\text{ch}15a} + \frac{8 \times 7 \times 6}{\text{ch}17a} + \cdot \cdot \right) \quad \text{--<S12-2>}$$

$$L(4) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} \frac{8a^4}{3} \left(\frac{3 \times 2 \times 1 \text{ch}7a}{\text{ch}14a + \text{cha}} + \frac{4 \times 3 \times 2 \text{ch}9a}{\text{ch}18a + \text{cha}} + \frac{5 \times 4 \times 3 \text{ch}11a}{\text{ch}22a + \text{cha}} + \frac{6 \times 5 \times 4 \text{ch}13a}{\text{ch}26a + \text{cha}} + \cdot \cdot \right) \quad \text{--<S12-3>}$$

$$L(4) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} 2a^3 \left(2 \times 1 \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh}5a} \right) + 3 \times 2 \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh}7a} \right) + 4 \times 3 \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh}9a} \right) + 5 \times 4 \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh}11a} \right) + \cdot \cdot \right) \quad \text{--<S12-4>}$$

$$L(4) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} \frac{2a^4}{3} \left(\frac{1 \times 3 \times 4}{\text{ch}4a} + \frac{2 \times 4 \times 6}{\text{ch}6a} + \frac{3 \times 5 \times 8}{\text{ch}8a} + \frac{4 \times 6 \times 10}{\text{ch}10a} + \cdot \cdot \right) \quad \text{-----<S12-5>}$$

◆ $\frac{5\pi^5}{1536}$ 極限公式 (L(5) 極限公式)

$$\frac{5\pi^5}{1536} = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{2a^5}{3} \left(\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{\text{ch}9a} + \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{\text{ch}11a} + \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{\text{ch}13a} + \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{\text{ch}15a} + \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{\text{ch}17a} + \cdot \cdot \right) \quad \text{--<S14-1>}$$

$$\frac{5\pi^5}{1536} = \lim_{a \rightarrow \pm 0} \frac{4a^4}{3} \left(3 \times 2 \times 1 \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh}7a} \right) + 4 \times 3 \times 2 \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh}9a} \right) + 5 \times 4 \times 3 \tan^{-1} \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh}11a} \right) + 6 \times 5 \times 4 \tan^{-1} \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh}13a} \right) + \cdot \cdot \right)$$

-----<S14-2>

=====

上記 10 個の青色式が得られた。Wolfram Alpha での数値検証でも式の成立を確認している。

今回の中ではとくに<S 12-5>が美しい。

$$L(4) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} \frac{2a^4}{3} \left(\frac{1 \times 3 \times 4}{\text{ch}4a} + \frac{2 \times 4 \times 6}{\text{ch}6a} + \frac{3 \times 5 \times 8}{\text{ch}8a} + \frac{4 \times 6 \times 10}{\text{ch}10a} + \cdot \cdot \right) \quad \text{-----<S12-5>}$$

右辺各項の分子が面白い。例えば、 $3 \times 5 \times 8$ では「3 と 5 を足せば 8」の規則がそのまま掛け算として並んでいる！

この＜S 1 2—5＞の証明の概要を以下に示す。

=====

＜S12—5＞の証明

次の[1]の式から出発する。これは 1 年半前に[こちら](#)で出した三変数の母等式である。

$$\frac{\sin x}{e^a - \alpha} + \frac{\sin 2x}{e^{2a} - \alpha} + \frac{\sin 3x}{e^{3a} - \alpha} + \frac{\sin 4x}{e^{4a} - \alpha} + \cdots = \left(\frac{\sin x}{2} \right) \left(\frac{1}{\text{cha} - \cos x} + \frac{\alpha}{\text{ch}2a - \cos x} + \frac{\alpha^2}{\text{ch}3a - \cos x} + \frac{\alpha^3}{\text{ch}4a - \cos x} + \cdots \right) \quad \text{---[1]}$$

($a > 0, |\alpha| < e^a$)

この[1]に α を $\alpha = i$ (虚数単位) として代入し、実部と虚部に分離すると、実部から次式を得る。

$$\frac{\sin x}{\text{cha}} + \frac{\sin 2x}{\text{ch}2a} + \frac{\sin 3x}{\text{ch}3a} + \frac{\sin 4x}{\text{ch}4a} + \cdots = \sin x \left(\frac{1}{\text{cha} - \cos x} - \frac{1}{\text{ch}3a - \cos x} + \frac{1}{\text{ch}5a - \cos x} - \frac{1}{\text{ch}7a - \cos x} + \cdots \right) \quad \text{---[A]}$$

この[A]を x について微分して[A]-2 (これは略す) を得る。その[A]-2 と上式[A]を組み合わせると次式を得る。

$$\begin{aligned} \sin^2 x \left(\frac{1}{(\text{cha} - \cos x)^2} - \frac{1}{(\text{ch}3a - \cos x)^2} + \frac{1}{(\text{ch}5a - \cos x)^2} - \frac{1}{(\text{ch}7a - \cos x)^2} + \cdots \right) \\ = \frac{1}{2 \sin x} \left(\frac{3 \sin x - \sin 3x}{\cosh 2a} + \frac{4 \sin 2x - 2 \sin 4x}{\cosh 3a} + \frac{5 \sin 3x - 3 \sin 5x}{\cosh 4a} + \frac{6 \sin 4x - 4 \sin 6x}{\cosh 5a} + \cdots \right) \end{aligned} \quad \text{-----[A]-3}$$

この両辺に $1/\sin^2 x$ を掛けて (右辺に出た $1/\sin^3 x$ はそれを右辺各項に分配法則で掛けていく) x を 0 に近づけると、右辺はロピタルの定理が適用でき、計算していくと次式となる。

$$\left(\frac{1}{(\text{cha}-1)^2} - \frac{1}{(\text{ch}3a-1)^2} + \frac{1}{(\text{ch}5a-1)^2} - \frac{1}{(\text{ch}7a-1)^2} + \cdots \right) = \frac{1}{6} \left(\frac{1 \times 3 \times 4}{\cosh 2a} + \frac{2 \times 4 \times 6}{\cosh 3a} + \frac{3 \times 5 \times 8}{\cosh 4a} + \frac{4 \times 6 \times 10}{\cosh 5a} + \cdots \right) \quad \text{-----[A]-4}$$

この両辺に a^4 を掛けて (左辺は各項に掛ける)、 a を 0 に近づけていくと左辺はロピタルの定理から最終的に $4 \times L(4)$ になり、そして最後に a を $2a$ に置き換えて目的の式に到達した。

$$L(4) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} \frac{2a^4}{3} \left(\frac{1 \times 3 \times 4}{\text{ch}4a} + \frac{2 \times 4 \times 6}{\text{ch}6a} + \frac{3 \times 5 \times 8}{\text{ch}8a} + \frac{4 \times 6 \times 10}{\text{ch}10a} + \cdots \right) \quad \text{-----<S12—5>}$$

終わり。

=====

このようにして＜S 1 2—5＞が得られた。略した証明だが、流れはこのようになる。ポイントは[A]-4 の両辺にわざわざ a^4 を掛ける点 (左辺は各項に掛ける) である。最後に a を $2a$ に置き換えたのは、本質的な意味からではなく、他式との比較を意識してのことである。なお、今回導出した青色式の残りの式も大体似た方法で得られる。

最後に、気になる点や思うことなど述べておく。

=====

●次の二式を眺めよう。

$$L(4) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} \frac{2a^4}{3} \left(\frac{1 \times 2 \times 3}{\text{ch}3a} + \frac{2 \times 3 \times 5}{\text{ch}5a} + \frac{3 \times 4 \times 7}{\text{ch}7a} + \frac{4 \times 5 \times 9}{\text{ch}9a} + \frac{5 \times 6 \times 11}{\text{ch}11a} + \frac{6 \times 7 \times 13}{\text{ch}13a} + \cdots \right) \quad \text{---<S12—1>}$$

$$L(4) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} \frac{2a^4}{3} \left(\frac{1 \times 3 \times 4}{\text{ch}4a} + \frac{2 \times 4 \times 6}{\text{ch}6a} + \frac{3 \times 5 \times 8}{\text{ch}8a} + \frac{4 \times 6 \times 10}{\text{ch}10a} + \dots \right) \quad \text{-----} \langle S12-5 \rangle$$

眺めるだけでたのしい式である。下式の方は4項で止めているが同じ規則が続いていく・・・。単純にしてふしぎなもの（面白いもの）というのはよい。なぜそれがよいかというと万人がたのしめるからである。主婦や高校生がたのしめれば最高である。昨今の現代数学は万人がたのしめないものになっているがそれはよくない。数学者の黒川信重氏は最近の数学はどんどんと複雑化していて嫌いだ！という意味を著作で述べているが（自分はシンプルなものが好きだと・・・）、まったく同感である。

●専門が細分化され高度化していくと、専門家の中のそのまた専門家のさらにそのまた専門家でないと理解できないというふうになってくる。現代数学は実際そうになっている。この分野が理解できるのは世界でも数十人（数人？）というものはざらにあると思う。それはこの高級な道具を購入しないとこのゲームはできない！つまり金持ちしかたのしめない！というのと同じであり、どういうわけか現代数学はそっちのその方向に走ってしまっている。またそういう状況というのは検証という意味においてもきわめて危うい状況となる。

●Wolfram Alpha で数値検証は以下のような感じでやっている。

a が 0.01 の場合、右辺和の項数を 10^3 個、 10^4 個、 10^5 個・・・と増やせばどんな値になるか？

a が 0.001 の場合、右辺和の項数を 10^3 個、 10^4 個、 10^5 個・・・と増やせばどんな値になるか？

a が 0.0001 の場合、右辺和の項数を 10^3 個、 10^4 個、 10^5 個・・・と増やせばどんな値になるか？

$$L(4) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} \frac{2a^4}{3} \left(\frac{1 \times 3 \times 4}{\text{ch}4a} + \frac{2 \times 4 \times 6}{\text{ch}6a} + \frac{3 \times 5 \times 8}{\text{ch}8a} + \frac{4 \times 6 \times 10}{\text{ch}10a} + \dots \right) \quad \text{-----} \langle S12-5 \rangle$$

この＜S 1 2—5＞の場合、上記のような方法で検証すると実際 Wolfram Alpha が出す値は、
 $L(4) = 1 - 1/3^4 + 1/5^4 - 1/7^4 + \dots = 0.98894455 \dots$ にどんどんと近づいていく。

●証明中の[1]を再掲。

$$\frac{\sin x}{e^a - \alpha} + \frac{\sin 2x}{e^{2a} - \alpha} + \frac{\sin 3x}{e^{3a} - \alpha} + \frac{\sin 4x}{e^{4a} - \alpha} + \dots = \left(\frac{\sin x}{2} \right) \left(\frac{1}{\text{ch}a - \cos x} + \frac{\alpha}{\text{ch}2a - \cos x} + \frac{\alpha^2}{\text{ch}3a - \cos x} + \frac{\alpha^3}{\text{ch}4a - \cos x} + \dots \right) \quad \text{--}[1]$$

この式は私の分類では、三変数・第一基本フーリエ sin 母等式（多くの母等式の中の一つ）という式になるのだが、これ一つからでも多くの公式がとび出してくる。[1]はものすごいエネルギーを秘めている。三変数のどれでも微分できるし（積分もできる）、また x に虚数を代入したら面白くなるし・・・で、そんなふうにしてこの式（小箱）から様々なものがとび出してくる。

=====

2025. 10. 25 杉岡幹生

sugioka_m@mvp.biglobe.ne.jp

<参考文献>

・「マグロウヒル 数学公式・数表ハンドブック」（Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社）