

＜ 三角関数と双曲線関数の融合域（その 5 1） ＞

極限公式を新たに四つ見出したので下方に青色式で示す。

なお、同公式は多く出すぎたため、今回のものに関係ないグループは略した。関係のあるグループは過去のものすべてを示した。また、従来と若干書き方を同値的に変えた式がある（例えば、 e^{-a} を $1/e^a$ などとした）。

以降において、 $L(1)$ 、 $L(2)$ 、 $\zeta(3)$ は次の通り。

$$L(1) = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \cdots = \pi/4$$

$$L(2) = 1 - 1/3^2 + 1/5^2 - 1/7^2 + \cdots = \text{非明示（カタランの定数）}$$

$$\zeta(3) = 1 + 1/2^3 + 1/3^3 + 1/4^3 + \cdots = \text{非明示}$$

以降では、双曲線関数 $\sinh$, $\cosh$, $\tanh$ はそれぞれ sh , ch , th と略記した。例えば、 $sh2a$ は $\sinh(2a)$ のことである。 a は任意の実数である。 $\tan^{-1}$, th^{-1} はそれぞれ $\arctan$, $\operatorname{arctanh}$ である。 $\log$ は自然対数、 e は自然対数の底。 $\sin$, $\cos$, $\tan$ は通常の表記である。

なお、 $\lim$ での $a \rightarrow +0$ は a をプラス側から 0 に近づける意味であり、 $a \rightarrow \pm 0$ は a をプラス側、マイナス側 どちらから 0 に近づけても OK の意味である。

=====

＜ 極限公式 ＞

◆ $L(2)$ 極限公式

$$L(2) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} a \left(\tan^{-1} \left(\frac{1}{sha} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{sh3a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{sh5a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{sh7a} \right) + \cdots \right) \quad \text{---<S1>}$$

$$L(2) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} a^2 \left(\frac{2}{ch2a} + \frac{4}{ch4a} + \frac{6}{ch6a} + \frac{8}{ch8a} + \cdots \right) \quad \text{----<S1-2>}$$

$$L(2) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} a^2 \left(\frac{1}{cha} + \frac{3}{ch3a} + \frac{5}{ch5a} + \frac{7}{ch7a} + \cdots \right) \quad \text{----<S1-3>}$$

$$L(2) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} a \left(\tan^{-1} \left(\frac{cha}{sha} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{cha}{sh3a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{cha}{sh5a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{cha}{sh7a} \right) + \cdots \right) \quad \text{--<S1-4>}$$

$$L(2) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} 2a \left(\tan^{-1} \left(\frac{cha}{sh2a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{cha}{sh6a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{cha}{sh10a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{cha}{sh14a} \right) + \cdots \right) \quad \text{--<S1-5>}$$

$$L(2) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} a \left(\tan^{-1} \left(\frac{\csc a}{sha} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\csc a}{sh3a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\csc a}{sh5a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\csc a}{sh7a} \right) + \cdots \right) \quad \text{--<S1-6>}$$

$$L(2) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} a \left(\tan^{-1} \left(\frac{sha}{cha} \right) + 3 \tan^{-1} \left(\frac{sha}{ch3a} \right) + 5 \tan^{-1} \left(\frac{sha}{ch5a} \right) + 7 \tan^{-1} \left(\frac{sha}{ch7a} \right) + \cdots \right) \quad \text{--<S1-7>}$$

$$L(2)=\lim_{a\rightarrow\pm 0}a\left(\operatorname{th}^{-1}\left(\frac{\operatorname{sina}}{\operatorname{cha}}\right)+3\operatorname{th}^{-1}\left(\frac{\operatorname{sina}}{\operatorname{ch3a}}\right)+5\operatorname{th}^{-1}\left(\frac{\operatorname{sina}}{\operatorname{ch5a}}\right)+7\operatorname{th}^{-1}\left(\frac{\operatorname{sina}}{\operatorname{ch7a}}\right)+\cdot\cdot\cdot\right) \text{ --<S1-8>}$$

$$L(2)=\lim_{a\rightarrow\pm 0}2a\left(\tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{cha}}{\operatorname{sh4a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{cha}}{\operatorname{sh8a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{cha}}{\operatorname{sh12a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{cha}}{\operatorname{sh16a}}\right)+\cdot\cdot\cdot\right) \text{ --<S1-9>}$$

$$L(2)=\lim_{a\rightarrow\pm 0}2a^2\left(\frac{1}{\operatorname{ch3a}}+\frac{2}{\operatorname{ch5a}}+\frac{3}{\operatorname{ch7a}}+\frac{4}{\operatorname{ch9a}}+\frac{5}{\operatorname{ch11a}}+\frac{6}{\operatorname{ch13a}}+\cdot\cdot\cdot\right) \text{ ----<S1-10>}$$

$$L(2)=\lim_{a\rightarrow\pm 0}\frac{a}{2}\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{sha}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{sh2a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{sh3a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{sh4a}}\right)+\cdot\cdot\cdot\right) \text{ --<S1-11>}$$

$$L(2)=\lim_{a\rightarrow+0}2a\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{ea}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{e^3a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{e^5a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{e^7a}}\right)+\cdot\cdot\cdot\right) \text{ --<S1-12>}$$

◆ $\frac{\pi}{4}$ 極限公式 (L(1)極限公式)

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{a}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{cha}}+\frac{1}{\operatorname{ch2a}}+\frac{1}{\operatorname{ch3a}}+\frac{1}{\operatorname{ch4a}}+\cdot\cdot\cdot\right) \text{ ----<S4-1>}$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\rightarrow+0}a\left(\frac{1}{\operatorname{cha}}+\frac{1}{\operatorname{ch3a}}+\frac{1}{\operatorname{ch5a}}+\frac{1}{\operatorname{ch7a}}+\cdot\cdot\cdot\right) \text{ ----<S4-2>}$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\rightarrow+0}a^2\left(\frac{2\operatorname{sh2a}}{\operatorname{ch}^22a}+\frac{4\operatorname{sh4a}}{\operatorname{ch}^24a}+\frac{6\operatorname{sh6a}}{\operatorname{ch}^26a}+\frac{8\operatorname{sh8a}}{\operatorname{ch}^28a}+\cdot\cdot\cdot\right) \text{ ---<S4-3>}$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\rightarrow+0}2a\left(\frac{\operatorname{cha}}{\operatorname{ch2a+cha}}+\frac{\operatorname{ch3a}}{\operatorname{ch6a+cha}}+\frac{\operatorname{ch5a}}{\operatorname{ch10a+cha}}+\frac{\operatorname{ch7a}}{\operatorname{ch14a+cha}}+\cdot\cdot\cdot\right) \text{ --<S4-4>}$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\rightarrow+0}2\left(\tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{sha}}{\operatorname{ch2a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{sha}}{\operatorname{ch6a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{sha}}{\operatorname{ch10a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{sha}}{\operatorname{ch14a}}\right)+\cdot\cdot\cdot\right) \text{ --<S4-5>}$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\rightarrow+0}\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{sha}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{sh3a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{sh5a}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{sh7a}}\right)+-\cdot\cdot\cdot\right) \text{ --<S4-6>}$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\rightarrow+0}4\left(\tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{sha}}{\operatorname{ch4a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{sha}}{\operatorname{ch12a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{sha}}{\operatorname{ch20a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{sha}}{\operatorname{ch28a}}\right)+\cdot\cdot\cdot\right) \text{ --<S4-7>}$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\rightarrow+0}2a\left(\frac{\operatorname{ch2a}}{\operatorname{ch4a+cha}}+\frac{\operatorname{ch4a}}{\operatorname{ch8a+cha}}+\frac{\operatorname{ch6a}}{\operatorname{ch12a+cha}}+\frac{\operatorname{ch8a}}{\operatorname{ch16a+cha}}+\cdot\cdot\cdot\right) \text{ ----<S4-8>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} \left(\tan^{-1} \left(\frac{\cos a}{\operatorname{sh} a} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\cos a}{\operatorname{sh} 3a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\cos a}{\operatorname{sh} 5a} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\cos a}{\operatorname{sh} 7a} \right) + - \cdot \cdot \right) \quad \text{--<S4-9>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} 2 \left(\tan^{-1} \left(\frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{ch} 4a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{ch} 8a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{ch} 12a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{ch} 16a} \right) + \cdot \cdot \right) \quad \text{--<S4-10>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} a^2 \left(\frac{\operatorname{sh} 2a}{\operatorname{ch} 4a + \cos 2a} + \frac{2\operatorname{sh} 3a}{\operatorname{ch} 6a + \cos 2a} + \frac{3\operatorname{sh} 4a}{\operatorname{ch} 8a + \cos 2a} + \frac{4\operatorname{sh} 5a}{\operatorname{ch} 10a + \cos 2a} + \cdot \cdot \right) \quad \text{---<S4-11>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} a^2 \left(\frac{\operatorname{sh} 2a}{\operatorname{ch} 4a + 1} + \frac{2\operatorname{sh} 3a}{\operatorname{ch} 6a + 1} + \frac{3\operatorname{sh} 4a}{\operatorname{ch} 8a + 1} + \frac{4\operatorname{sh} 5a}{\operatorname{ch} 10a + 1} + \cdot \cdot \right) \quad \text{---<S4-12>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} 2 \left(\tan^{-1} \left(\frac{1}{e^a} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{1}{e^{3a}} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{e^{5a}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{1}{e^{7a}} \right) + - \cdot \cdot \right) \quad \text{--<S4-13>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} a^2 \left(\frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{ch}^2 a} + \frac{3\operatorname{sh} 3a}{\operatorname{ch}^2 3a} + \frac{5\operatorname{sh} 5a}{\operatorname{ch}^2 5a} + \frac{7\operatorname{sh} 7a}{\operatorname{ch}^2 7a} + \cdot \cdot \right) \quad \text{---<S4-14>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} 2a \left(\frac{\sin a \cdot \operatorname{sh} a}{\operatorname{ch} 2a + \cos 2a} + \frac{3\sin a \cdot \operatorname{sh} 3a}{\operatorname{ch} 6a + \cos 2a} + \frac{5\sin a \cdot \operatorname{sh} 5a}{\operatorname{ch} 10a + \cos 2a} + \frac{7\sin a \cdot \operatorname{sh} 7a}{\operatorname{ch} 14a + \cos 2a} + \cdot \cdot \right) \quad \text{---<S4-15>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} 2 \left(\cos a \cdot \tan^{-1}(e^{-a}) - \cos 3a \cdot \tan^{-1}(e^{-3a}) + \cos 5a \cdot \tan^{-1}(e^{-5a}) - \cos 7a \cdot \tan^{-1}(e^{-7a}) + - \cdot \cdot \right) \quad \text{--<S4-16>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} 4 \left(\tan^{-1} \left(\frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{ch} 8a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{ch} 16a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{ch} 24a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{ch} 32a} \right) + \cdot \cdot \right) \quad \text{--<S4-17>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} 8 \left(\tan^{-1} \left(\frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{ch} 16a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{ch} 32a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{ch} 48a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{ch} 64a} \right) + \cdot \cdot \right) \quad \text{--<S4-18>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} 16 \left(\tan^{-1} \left(\frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{ch} 32a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{ch} 64a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{ch} 96a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{ch} 128a} \right) + \cdot \cdot \right) \quad \text{--<S4-19>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} 4a \left(\frac{\operatorname{ch} 2a}{\operatorname{ch} 4a + \operatorname{ch} a} + \frac{\operatorname{ch} 6a}{\operatorname{ch} 12a + \operatorname{ch} a} + \frac{\operatorname{ch} 10a}{\operatorname{ch} 20a + \operatorname{ch} a} + \frac{\operatorname{ch} 14a}{\operatorname{ch} 28a + \operatorname{ch} a} + \cdot \cdot \right) \quad \text{---<S4-20>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} 8a \left(\frac{\operatorname{ch} 4a}{\operatorname{ch} 8a + \operatorname{ch} a} + \frac{\operatorname{ch} 12a}{\operatorname{ch} 24a + \operatorname{ch} a} + \frac{\operatorname{ch} 20a}{\operatorname{ch} 40a + \operatorname{ch} a} + \frac{\operatorname{ch} 28a}{\operatorname{ch} 56a + \operatorname{ch} a} + \cdot \cdot \right) \quad \text{---<S4-21>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} 16a \left(\frac{\operatorname{ch} 8a}{\operatorname{ch} 16a + \operatorname{ch} a} + \frac{\operatorname{ch} 24a}{\operatorname{ch} 48a + \operatorname{ch} a} + \frac{\operatorname{ch} 40a}{\operatorname{ch} 80a + \operatorname{ch} a} + \frac{\operatorname{ch} 56a}{\operatorname{ch} 112a + \operatorname{ch} a} + \cdot \cdot \right) \quad \text{---<S4-22>}$$

-

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} \left(\tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sha}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh}2a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh}3a} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh}4a} \right) + \dots \right) \quad \text{---<S4-23>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} 2 \left(\tan^{-1} \left(\frac{1}{e^a} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{1}{e^{2a}} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{e^{3a}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{1}{e^{4a}} \right) + \dots \right) \quad \text{---<S4-24>}$$

◆log2 極限公式

$$\log 2 = \lim_{a \rightarrow +0} a \left(\frac{1}{e^a + 1} + \frac{1}{e^{2a} + 1} + \frac{1}{e^{3a} + 1} + \frac{1}{e^{4a} + 1} + \dots \right) \quad \text{----<S5-1>}$$

$$\log 2 = \lim_{a \rightarrow +0} 2a \left(\frac{1}{e^a + 1} + \frac{1}{e^{3a} + 1} + \frac{1}{e^{5a} + 1} + \frac{1}{e^{7a} + 1} + \dots \right) \quad \text{----<S5-2>}$$

$$\log 2 = \lim_{a \rightarrow \pm 0} 2a^2 \left(\frac{1}{\text{ch}^2 a} + \frac{3}{\text{ch}^2 3a} + \frac{5}{\text{ch}^2 5a} + \frac{7}{\text{ch}^2 7a} + \dots \right) \quad \text{---<S5-3>}$$

$$\log 2 = \lim_{a \rightarrow \pm 0} a^2 \left(\frac{1}{\text{ch}^2 a} + \frac{2}{\text{ch}^2 2a} + \frac{3}{\text{ch}^2 3a} + \frac{4}{\text{ch}^2 4a} + \dots \right) \quad \text{---<S5-4>}$$

$$\log 2 = \lim_{a \rightarrow +0} 2a \left(\text{sha} \cdot \log \left(\frac{\text{cha}}{\text{sha}} \right) + \text{sh}3a \cdot \log \left(\frac{\text{ch}3a}{\text{sh}3a} \right) + \text{sh}5a \cdot \log \left(\frac{\text{ch}5a}{\text{sh}5a} \right) + \dots \right) \quad \text{---<S5-5>}$$

$$\log 2 = \lim_{a \rightarrow +0} a \left(\text{sha} \cdot \log \left(\frac{\text{cha}}{\text{sha}} \right) + \text{sh}2a \cdot \log \left(\frac{\text{ch}2a}{\text{sh}2a} \right) + \text{sh}3a \cdot \log \left(\frac{\text{ch}3a}{\text{sh}3a} \right) + \dots \right) \quad \text{--<S5-6>}$$

$$\log 2 = \lim_{a \rightarrow +0} 2a \left(\frac{e^{-2a} + \text{cha}}{\text{ch}2a + \text{cha}} + \frac{e^{-6a} + \text{cha}}{\text{ch}6a + \text{cha}} + \frac{e^{-10a} + \text{cha}}{\text{ch}10a + \text{cha}} + \frac{e^{-14a} + \text{cha}}{\text{ch}14a + \text{cha}} + \dots \right) \quad \text{---<S5-7>}$$

$$\log 2 = \lim_{a \rightarrow +0} \left(\frac{a}{2} \right) \left(\frac{1}{e^a} \cdot \text{th}^{-1} \left(\frac{1}{\text{cha}} \right) + \frac{1}{e^{2a}} \cdot \text{th}^{-1} \left(\frac{1}{\text{ch}2a} \right) + \frac{1}{e^{3a}} \cdot \text{th}^{-1} \left(\frac{1}{\text{ch}3a} \right) + \frac{1}{e^{4a}} \cdot \text{th}^{-1} \left(\frac{1}{\text{ch}4a} \right) + \dots \right) \quad \text{--<S5-8>}$$

$$\log 2 = \lim_{a \rightarrow \pm 0} a^3 \left(\frac{1^2 \text{sha}}{\text{ch}^3 a} + \frac{2^2 \text{sh}2a}{\text{ch}^3 2a} + \frac{3^2 \text{sh}3a}{\text{ch}^3 3a} + \frac{4^2 \text{sh}4a}{\text{ch}^3 4a} + \dots \right) \quad \text{---<S5-9>}$$

$$\log 2 = \lim_{a \rightarrow +0} \left(\frac{a}{2} \right) \left(\left(1 - \frac{\text{sha}}{\text{cha} + 1} \right) + \left(1 - \frac{\text{sh}2a}{\text{ch}2a + 1} \right) + \left(1 - \frac{\text{sh}3a}{\text{ch}3a + 1} \right) + \left(1 - \frac{\text{sh}4a}{\text{ch}4a + 1} \right) + \dots \right) \quad \text{--<S5-10>}$$

◆ζ(3)極限公式

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{16a^2}{7}\log\left(\frac{1}{\text{th}2a\cdot\text{th}^23a\cdot\text{th}^34a\cdot\text{th}^45a\cdots}\right) \quad \text{---<S6-1>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow\pm0}\frac{8a^4}{9}\left(\frac{2^3-2}{\text{ch}^22a}+\frac{3^3-3}{\text{ch}^23a}+\frac{4^3-4}{\text{ch}^24a}+\frac{5^3-5}{\text{ch}^25a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S6-2>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow\pm0}\frac{2a^4}{3}\left(\frac{2^3-2}{\text{sh}^22a}+\frac{3^3-3}{\text{sh}^23a}+\frac{4^3-4}{\text{sh}^24a}+\frac{5^3-5}{\text{sh}^25a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S6-3>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow\pm0}\frac{16a^3}{7}\left(\frac{1^2}{\text{sh}2a}+\frac{2^2}{\text{sh}4a}+\frac{3^2}{\text{sh}6a}+\frac{4^2}{\text{sh}8a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S6-4>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{16a^3}{3}\left(\frac{1^2}{e^{2a}+1}+\frac{2^2}{e^{4a}+1}+\frac{3^2}{e^{6a}+1}+\frac{4^2}{e^{8a}+1}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S6-5>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{8a^2}{3}\log\left((1+e^{-a})(1+e^{-3a})^3(1+e^{-5a})^5(1+e^{-7a})^7\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S6-6>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}4a^2\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-2a})(1-e^{-4a})^2(1-e^{-6a})^3(1-e^{-8a})^4\cdot\cdot}\right) \quad \text{---<S6-7>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{16a^2}{3}\log\left((1+e^{-2a})(1+e^{-4a})^2(1+e^{-6a})^3(1+e^{-8a})^4\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S6-8>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}2a^2\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-3a})^3(1-e^{-5a})^5(1-e^{-7a})^7\cdot\cdot}\right) \quad \text{---<S6-9>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{4a^3}{3}\left(\frac{1^2}{e^a+1}+\frac{3^2}{e^{3a}+1}+\frac{5^2}{e^{5a}+1}+\frac{7^2}{e^{7a}+1}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S6-10>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}a^3\left(\frac{1^2}{e^a-1}+\frac{3^2}{e^{3a}-1}+\frac{5^2}{e^{5a}-1}+\frac{7^2}{e^{7a}-1}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S6-11>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow\pm0}\frac{4a^3}{7}\left(\frac{1^2}{\text{sha}}+\frac{3^2}{\text{sh}3a}+\frac{5^2}{\text{sh}5a}+\frac{7^2}{\text{sh}7a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S6-12>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{16a^2}{7}\left(\text{th}^{-1}(e^{-a})+3\text{th}^{-1}(e^{-3a})+5\text{th}^{-1}(e^{-5a})+7\text{th}^{-1}(e^{-7a})+\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S6-13>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow\pm 0}\frac{8a^2}{7}\left(\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{cha}}\right)+3\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}3a}\right)+5\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}5a}\right)+7\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}7a}\right)+\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S6-14>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow\pm 0}\frac{4a^4}{3}\left(\frac{3^3-3}{\mathrm{sh}^23a}+\frac{5^3-5}{\mathrm{sh}^25a}+\frac{7^3-7}{\mathrm{sh}^27a}+\frac{9^3-9}{\mathrm{sh}^29a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S6-15>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{8a^2}{3}\log(2(1+e^{-2a})^3(1+e^{-4a})^5(1+e^{-6a})^7\cdot\cdot) \quad \text{---<S6-16>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{8a^2}{3}\log\left((1+e^{-2a})(1+e^{-4a})^3(1+e^{-6a})^5(1+e^{-8a})^7\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S6-17>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{8a^2}{3}\log\left((1+e^a)(1+e^{-a})^3(1+e^{-3a})^5(1+e^{-5a})^7\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S6-18>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{8a^2}{3}\log\left((1+e^{-3a})(1+e^{-5a})^3(1+e^{-7a})^5(1+e^{-9a})^7\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S6-19>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{16a^2}{3}\log\left((1+e^{-a})(1+e^{-3a})^2(1+e^{-5a})^3(1+e^{-7a})^4\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S6-20>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{16a^2}{3}\log\left((1+e^{-3a})(1+e^{-5a})^2(1+e^{-7a})^3(1+e^{-9a})^4\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S6-21>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{16a^2}{3}\log(2(1+e^{-2a})^2(1+e^{-4a})^3(1+e^{-6a})^4(1+e^{-8a})^5\cdot\cdot) \quad \text{---<S6-22>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{16a^2}{3}\log\left((1+e^a)(1+e^{-a})^2(1+e^{-3a})^3(1+e^{-5a})^4\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S6-23>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow\pm 0}\frac{8a^4}{9}\left(\frac{1^3}{\mathrm{ch}^2a}+\frac{2^3}{\mathrm{ch}^22a}+\frac{3^3}{\mathrm{ch}^23a}+\frac{4^3}{\mathrm{ch}^24a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S6-24>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow\pm 0}\frac{2a^4}{3}\left(\frac{1^3}{\mathrm{sh}^2a}+\frac{2^3}{\mathrm{sh}^22a}+\frac{3^3}{\mathrm{sh}^23a}+\frac{4^3}{\mathrm{sh}^24a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S6-25>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{a^3}{2}\left(\frac{1^2}{e^a-1}+\frac{2^2}{e^{2a}-1}+\frac{3^2}{e^{3a}-1}+\frac{4^2}{e^{4a}-1}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S6-26>}$$

=====

上記四つの青色式が得られた。Wolfram Alpha での数値検証でも式の成立を確認している。
紙幅の関係から証明は略すが、これまで示してきた証明と同じような方針のものとなる。

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

=====

●次の二式を眺めたい。

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} 2 \left(\tan^{-1} \left(\frac{1}{e^a} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{1}{e^{3a}} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{e^{5a}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{1}{e^{7a}} \right) + \cdots \right) \quad \text{---<S4-13>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} 2 \left(\tan^{-1} \left(\frac{1}{e^a} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{1}{e^{2a}} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{e^{3a}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{1}{e^{4a}} \right) + \cdots \right) \quad \text{---<S4-24>}$$

眺めているとふしぎな感覚に陥る。これはなんなんだろう？と思う。

<S 4—1 3>は7カ月前に出したが、ノートに、このウラ側には深いものがひそんでいる！と記している。どういふことでそれを書いたのか思い出せないが、この二式は比べ合うことで奥行きが増していく感がある。

上記二式は、三変数の三角関数と双曲線関数の融合域から出た式である。二変数の同領域は天国界と思えるきれいな世界でとても広い領域である。一方、三変数域は天国と地獄が一緒になったような恐ろしい地帯で広大無辺であって広さは二変数域の比ではない、両式はそんなところからきている。

●次の二式を眺めたい。

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow +0} a^3 \left(\frac{1^2}{e^a - 1} + \frac{3^2}{e^{3a} - 1} + \frac{5^2}{e^{5a} - 1} + \frac{7^2}{e^{7a} - 1} + \cdots \right) \quad \text{----<S6-11>}$$

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{a^3}{2} \left(\frac{1^2}{e^a - 1} + \frac{2^2}{e^{2a} - 1} + \frac{3^2}{e^{3a} - 1} + \frac{4^2}{e^{4a} - 1} + \cdots \right) \quad \text{----<S6-26>}$$

こちらはよくあるパターンである。(1 2 3 4...)を1/2倍したものが(1 3 5 7...)に等しくなるというパターンであり、何度も見てきた。これらもシンプルで美しい。

●次を見たい。

$$L(2) = \lim_{a \rightarrow +0} 2a \left(\tan^{-1} \left(\frac{1}{e^a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{e^{3a}} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{e^{5a}} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{e^{7a}} \right) + \cdots \right) \quad \text{---<S1-12>}$$

$$\log 2 = \lim_{a \rightarrow +0} \left(\frac{a}{2} \right) \left(\left(1 - \frac{\text{sha}}{\text{cha}+1} \right) + \left(1 - \frac{\text{sh2a}}{\text{ch2a}+1} \right) + \left(1 - \frac{\text{sh3a}}{\text{ch3a}+1} \right) + \left(1 - \frac{\text{sh4a}}{\text{ch4a}+1} \right) + \cdots \right) \quad \text{---<5-10>}$$

これらはそれぞれ相棒がいるにちがいない。

<S 1—1 2>には(1 2 3 4...)型の、<S 5—1 0>には(1 3 5 7...)型の相棒がいるはずである。

=====

2025. 10. 18 杉岡幹生

sugioka_m@mvb.biglobe.ne.jp

<参考文献>

・「マグロウヒル 数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)