

## ＜ 三角関数と双曲線関数の融合域（その 50） ＞

新たに極限公式を四つ見出したので下方に青色式で示す。なお、同公式は多く出すぎたため、今回のものに関係ないグループは略した。関係のあるグループは過去のものすべて示した。

以降において、 $\zeta(3)$ 、 $L2(1)$  は次の通り。

$$\zeta(3) = 1 + 1/2^3 + 1/3^3 + 1/4^3 + \dots = \text{非明示}$$

$$L2(1) = 1 + 1/3 - 1/5 - 1/7 + 1/9 + 1/11 - 1/13 - 1/15 + \dots = \pi\sqrt{2}/4$$

注記： $L2(1)$  の意味は後述した。

以降では、双曲線関数  $\sinh$ ,  $\cosh$ ,  $\tanh$  はそれぞれ  $sh$ ,  $ch$ ,  $th$  と略記した。例えば、 $sh2a$  は  $\sinh(2a)$  のことである。 $a$  は任意の実数である。 $th^{-1}$  は  $\operatorname{arctanh}$  である。 $\log$  は自然対数、 $e$  は自然対数の底。

なお、 $\lim$  での  $a \rightarrow +0$  は  $a$  をプラス側から 0 に近づける意味であり、 $a \rightarrow \pm 0$  は  $a$  をプラス側、マイナス側 どちらから 0 に近づけても OK の意味である。

=====

## ＜ 極限公式 ＞

### ◆log2 極限公式

$$\log 2 = \lim_{a \rightarrow +0} a \left( \frac{1}{e^a + 1} + \frac{1}{e^{2a} + 1} + \frac{1}{e^{3a} + 1} + \frac{1}{e^{4a} + 1} + \dots \right) \quad \text{----} \langle S5-1 \rangle$$

$$\log 2 = \lim_{a \rightarrow +0} 2a \left( \frac{1}{e^a + 1} + \frac{1}{e^{3a} + 1} + \frac{1}{e^{5a} + 1} + \frac{1}{e^{7a} + 1} + \dots \right) \quad \text{----} \langle S5-2 \rangle$$

$$\log 2 = \lim_{a \rightarrow \pm 0} 2a^2 \left( \frac{1}{ch^2 a} + \frac{3}{ch^2 3a} + \frac{5}{ch^2 5a} + \frac{7}{ch^2 7a} + \dots \right) \quad \text{---} \langle S5-3 \rangle$$

$$\log 2 = \lim_{a \rightarrow \pm 0} a^2 \left( \frac{1}{ch^2 a} + \frac{2}{ch^2 2a} + \frac{3}{ch^2 3a} + \frac{4}{ch^2 4a} + \dots \right) \quad \text{---} \langle S5-4 \rangle$$

$$\log 2 = \lim_{a \rightarrow +0} 2a \left( sha \cdot \log \left( \frac{cha}{sha} \right) + sh3a \cdot \log \left( \frac{ch3a}{sh3a} \right) + sh5a \cdot \log \left( \frac{ch5a}{sh5a} \right) + \dots \right) \quad \text{---} \langle S5-5 \rangle$$

$$\log 2 = \lim_{a \rightarrow +0} a \left( sha \cdot \log \left( \frac{cha}{sha} \right) + sh2a \cdot \log \left( \frac{ch2a}{sh2a} \right) + sh3a \cdot \log \left( \frac{ch3a}{sh3a} \right) + \dots \right) \quad \text{--} \langle S5-6 \rangle$$

$$\log 2 = \lim_{a \rightarrow +0} 2a \left( \frac{e^{-2a} + cha}{ch2a + cha} + \frac{e^{-6a} + cha}{ch6a + cha} + \frac{e^{-10a} + cha}{ch10a + cha} + \frac{e^{-14a} + cha}{ch14a + cha} + \dots \right) \quad \text{---} \langle S5-7 \rangle$$

$$\log 2 = \lim_{a \rightarrow +0} \left( \frac{a}{2} \right) \left( \frac{1}{e^a} \cdot \text{th}^{-1} \left( \frac{1}{\text{cha}} \right) + \frac{1}{e^{2a}} \cdot \text{th}^{-1} \left( \frac{1}{\text{ch}2a} \right) + \frac{1}{e^{3a}} \cdot \text{th}^{-1} \left( \frac{1}{\text{ch}3a} \right) + \frac{1}{e^{4a}} \cdot \text{th}^{-1} \left( \frac{1}{\text{ch}4a} \right) + \dots \right) \quad \text{---<5-8>}$$

$$\log 2 = \lim_{a \rightarrow \pm 0} a^3 \left( \frac{1^2 \text{sha}}{\text{ch}^3 a} + \frac{2^2 \text{sh}2a}{\text{ch}^3 2a} + \frac{3^2 \text{sh}3a}{\text{ch}^3 3a} + \frac{4^2 \text{sh}4a}{\text{ch}^3 4a} + \dots \right) \quad \text{---<S5-9>}$$

### ◆ζ(3)極限公式

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{16a^2}{7} \log \left( \frac{1}{\text{th}2a \cdot \text{th}^2 3a \cdot \text{th}^3 4a \cdot \text{th}^4 5a \dots} \right) \quad \text{---<S6-1>}$$

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} \frac{8a^4}{9} \left( \frac{2^3 - 2}{\text{ch}^2 2a} + \frac{3^3 - 3}{\text{ch}^2 3a} + \frac{4^3 - 4}{\text{ch}^2 4a} + \frac{5^3 - 5}{\text{ch}^2 5a} + \dots \right) \quad \text{---<S6-2>}$$

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} \frac{2a^4}{3} \left( \frac{2^3 - 2}{\text{sh}^2 2a} + \frac{3^3 - 3}{\text{sh}^2 3a} + \frac{4^3 - 4}{\text{sh}^2 4a} + \frac{5^3 - 5}{\text{sh}^2 5a} + \dots \right) \quad \text{---<S6-3>}$$

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} \frac{16a^3}{7} \left( \frac{1^2}{\text{sh}2a} + \frac{2^2}{\text{sh}4a} + \frac{3^2}{\text{sh}6a} + \frac{4^2}{\text{sh}8a} + \dots \right) \quad \text{----<S6-4>}$$

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{16a^3}{3} \left( \frac{1^2}{e^{2a+1}} + \frac{2^2}{e^{4a+1}} + \frac{3^2}{e^{6a+1}} + \frac{4^2}{e^{8a+1}} + \dots \right) \quad \text{----<S6-5>}$$

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{8a^2}{3} \log \left( (1 + e^{-a})(1 + e^{-3a})^3(1 + e^{-5a})^5(1 + e^{-7a})^7 \dots \right) \quad \text{---<S6-6>}$$

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow +0} 4a^2 \cdot \log \left( \frac{1}{(1 - e^{-2a})(1 - e^{-4a})^2(1 - e^{-6a})^3(1 - e^{-8a})^4 \dots} \right) \quad \text{---<S6-7>}$$

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{16a^2}{3} \log \left( (1 + e^{-2a})(1 + e^{-4a})^2(1 + e^{-6a})^3(1 + e^{-8a})^4 \dots \right) \quad \text{---<S6-8>}$$

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow +0} 2a^2 \cdot \log \left( \frac{1}{(1 - e^{-a})(1 - e^{-3a})^3(1 - e^{-5a})^5(1 - e^{-7a})^7 \dots} \right) \quad \text{---<S6-9>}$$

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{4a^3}{3} \left( \frac{1^2}{e^{a+1}} + \frac{3^2}{e^{3a+1}} + \frac{5^2}{e^{5a+1}} + \frac{7^2}{e^{7a+1}} + \dots \right) \quad \text{----<S6-10>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}a^3\left(\frac{1^2}{e^a-1}+\frac{3^2}{e^{3a}-1}+\frac{5^2}{e^{5a}-1}+\frac{7^2}{e^{7a}-1}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S6-11>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow\pm0}\frac{4a^3}{7}\left(\frac{1^2}{\text{sha}}+\frac{3^2}{\text{sh}3a}+\frac{5^2}{\text{sh}5a}+\frac{7^2}{\text{sh}7a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S6-12>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{16a^2}{7}\left(\text{th}^{-1}(e^{-a})+3\text{th}^{-1}(e^{-3a})+5\text{th}^{-1}(e^{-5a})+7\text{th}^{-1}(e^{-7a})+\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S6-13>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow\pm0}\frac{8a^2}{7}\left(\text{th}^{-1}\left(\frac{1}{\text{cha}}\right)+3\text{th}^{-1}\left(\frac{1}{\text{ch}3a}\right)+5\text{th}^{-1}\left(\frac{1}{\text{ch}5a}\right)+7\text{th}^{-1}\left(\frac{1}{\text{ch}7a}\right)+\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S6-14>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow\pm0}\frac{4a^4}{3}\left(\frac{3^3-3}{\text{sh}^23a}+\frac{5^3-5}{\text{sh}^25a}+\frac{7^3-7}{\text{sh}^27a}+\frac{9^3-9}{\text{sh}^29a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S6-15>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{8a^2}{3}\log(2(1+e^{-2a})^3(1+e^{-4a})^5(1+e^{-6a})^7\cdot\cdot) \quad \text{---<S6-16>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{8a^2}{3}\log\left((1+e^{-2a})(1+e^{-4a})^3(1+e^{-6a})^5(1+e^{-8a})^7\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S6-17>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{8a^2}{3}\log\left((1+e^a)(1+e^{-a})^3(1+e^{-3a})^5(1+e^{-5a})^7\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S6-18>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{8a^2}{3}\log\left((1+e^{-3a})(1+e^{-5a})^3(1+e^{-7a})^5(1+e^{-9a})^7\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S6-19>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{16a^2}{3}\log\left((1+e^{-a})(1+e^{-3a})^2(1+e^{-5a})^3(1+e^{-7a})^4\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S6-20>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{16a^2}{3}\log\left((1+e^{-3a})(1+e^{-5a})^2(1+e^{-7a})^3(1+e^{-9a})^4\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S6-21>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{16a^2}{3}\log(2(1+e^{-2a})^2(1+e^{-4a})^3(1+e^{-6a})^4(1+e^{-8a})^5\cdot\cdot) \quad \text{---<S6-22>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{16a^2}{3}\log\left((1+e^a)(1+e^{-a})^2(1+e^{-3a})^3(1+e^{-5a})^4\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S6-23>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow\pm0}\frac{8a^4}{9}\left(\frac{1^3}{\text{ch}^2a}+\frac{2^3}{\text{ch}^22a}+\frac{3^3}{\text{ch}^23a}+\frac{4^3}{\text{ch}^24a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S6-24>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow\pm0}\frac{2a^4}{3}\left(\frac{1^3}{\operatorname{sh}^2a}+\frac{2^3}{\operatorname{sh}^22a}+\frac{3^3}{\operatorname{sh}^23a}+\frac{4^3}{\operatorname{sh}^24a}+\cdots\right) \quad \text{----<S6-25>}$$

◆  $\pi\sqrt{2}/4$  極限公式 (虚 2 次体  $Q(\sqrt{-2})$  ゼータ  $L_2(1)$  極限公式)

$$\begin{aligned} \frac{\pi\sqrt{2}}{4} &= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + + - - \cdots \\ &= \lim_{a\rightarrow+0} 2a \left( \frac{\operatorname{cha}}{\operatorname{ch}2a} + \frac{\operatorname{ch}3a}{\operatorname{ch}6a} + \frac{\operatorname{ch}5a}{\operatorname{ch}10a} + \frac{\operatorname{ch}7a}{\operatorname{ch}14a} + \cdots \right) \quad \text{----<S10-1>} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\pi\sqrt{2}}{4} &= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + + - - \cdots \\ &= \lim_{a\rightarrow+0} a \left( \frac{\operatorname{cha}}{\operatorname{ch}2a} + \frac{\operatorname{ch}2a}{\operatorname{ch}4a} + \frac{\operatorname{ch}3a}{\operatorname{ch}6a} + \frac{\operatorname{ch}4a}{\operatorname{ch}8a} + \cdots \right) \quad \text{----<S10-2>} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\pi\sqrt{2}}{4} &= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + + - - \cdots \\ &= \lim_{a\rightarrow+0} 2a^2 \left( \frac{1(3\operatorname{sh}2a+\operatorname{sh}6a)}{\operatorname{ch}^24a} + \frac{2(3\operatorname{sh}4a+\operatorname{sh}12a)}{\operatorname{ch}^28a} + \frac{3(3\operatorname{sh}6a+\operatorname{sh}18a)}{\operatorname{ch}^212a} + \frac{4(3\operatorname{sh}8a+\operatorname{sh}24a)}{\operatorname{ch}^216a} + \cdots \right) \quad \text{--<S10-3>} \\ &===== \end{aligned}$$

上記四つの青色式が得られた。Wolfram Alpha での数値検証でも式の成立を確認している。<S 1 0—3> 以外はシンプルで美しい形をしている。<S 1 0—3>もよく見ると、きれいな秩序からできている。

ここで、 $L_2(1)$ は虚 2 次体  $Q(\sqrt{-2})$  ゼータ  $L_2(s)=1 + 1/3^s - 1/5^s - 1/7^s + 1/9^s + 1/11^s - 1/13^s - 1/15^s + \cdots$  の  $s$  が 1 の場合の特殊値である。⇒ $L_2(1)=\pi\sqrt{2}/4$

$L_2(s)$ はディリクレの L 関数  $L(\chi, s)=1 + \chi(2)/2^s + \chi(3)/3^s + \chi(4)/4^s + \chi(5)/5^s + \chi(6)/6^s + \cdots$  の一種であり、虚 2 次体  $Q(\sqrt{-2})$ に関係している。

$L_2(s)$ は、 $L_2(s)=\sum \chi(n)/n^s$ において  
 $n \equiv 1 \text{ or } 3 \pmod{8}$  のとき  $\chi(n)=1$ ,  $n \equiv 5 \text{ or } 7 \pmod{8}$  のとき  $\chi(n)=-1$ , その他のとき  $\chi(n)=0$  となるものである。つまりは  $n$  が 8 で割って 1 か 3 余る場合は  $\chi(n)$  は 1、8 で割って 5 か 7 余る場合は  $\chi(n)$  は -1、それ以外は 0 になるものである。 $L_2(s)$ や  $L_2(1)$ を見ると、たしかにその通りになっている！

なお、“ $L_2(s)$ ” という記法は私独自のものであり一般的なものでないので、了解願いたい。

さて、ここで<S 1 0—2>の証明の概要を以下に示す。

=====

## <S10—2>の証明

次の式から出発する。これは 2023/7/17 に[こちら](#)で出した 2 変数の恒等式 (母等式) である。

$$\begin{aligned} &\frac{\sin x}{e^a-1} + \frac{\sin 3x}{e^{3a}-1} + \frac{\sin 5x}{e^{5a}-1} + \frac{\sin 7x}{e^{7a}-1} + \cdots \\ &= \sin x \left\{ \frac{\operatorname{cha}}{\operatorname{ch}2a-\cos 2x} + \frac{\operatorname{ch}2a}{\operatorname{ch}4a-\cos 2x} + \frac{\operatorname{ch}3a}{\operatorname{ch}6a-\cos 2x} + \frac{\operatorname{ch}4a}{\operatorname{ch}8a-\cos 2x} + \cdots \right\} \quad \text{---[基本式1]} \end{aligned}$$

(x は任意の実数,  $a > 0$ )

これは第三系列の基本式という位置づけの式である。当時は  $x$  を  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  としていたが、 $x$  は“任意の実数”が正しいので、上でそのように直した。さて、上式の  $x$  に  $\pi/4$  を代入して次式を得る。ただし  $a > 0$

$$\frac{1}{e^a - 1} + \frac{1}{e^{3a} - 1} - \frac{1}{e^{5a} - 1} - \frac{1}{e^{7a} - 1} + \frac{1}{e^{9a} - 1} + \frac{1}{e^{11a} - 1} - \frac{1}{e^{13a} - 1} - \frac{1}{e^{15a} - 1} + + - - \cdot \cdot = \frac{\text{cha}}{\text{ch}2a} + \frac{\text{ch}2a}{\text{ch}4a} + \frac{\text{ch}3a}{\text{ch}6a} + \frac{\text{ch}4a}{\text{ch}8a} + \cdot \cdot$$

この両辺に  $a$  を掛けると次となる（左辺は各項それぞれに掛ける）。

$$\frac{a}{e^a - 1} + \frac{a}{e^{3a} - 1} - \frac{a}{e^{5a} - 1} - \frac{a}{e^{7a} - 1} + \frac{a}{e^{9a} - 1} + \frac{a}{e^{11a} - 1} - \frac{a}{e^{13a} - 1} - \frac{a}{e^{15a} - 1} + + - - \cdot \cdot = a \left( \frac{\text{cha}}{\text{ch}2a} + \frac{\text{ch}2a}{\text{ch}4a} + \frac{\text{ch}3a}{\text{ch}6a} + \frac{\text{ch}4a}{\text{ch}8a} + \cdot \cdot \right)$$

$a$  をプラス側から 0 に近づけていく。すると、左辺はロピタルの定理が適用できて  $L2(1)$  つまり  $1 + 1/3 - 1/5 - 1/7 + 1/9 + 1/11 - 1/13 - 1/15 + + - - \cdot \cdot$  すなわち  $\pi\sqrt{2}/4$  となる。  
よって、目標の  $<S10-2>$  に到達した。

$$\begin{aligned} \frac{\pi\sqrt{2}}{4} &= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + + - - \cdot \cdot \\ &= \lim_{a \rightarrow +0} a \left( \frac{\text{cha}}{\text{ch}2a} + \frac{\text{ch}2a}{\text{ch}4a} + \frac{\text{ch}3a}{\text{ch}6a} + \frac{\text{ch}4a}{\text{ch}8a} + \cdot \cdot \right) \quad \text{----} <S10-2> \end{aligned}$$

終わり。

=====

このようにして  $<S10-2>$  が得られた。他式も類似的な方法で得られる。

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

=====

- 上記証明中の[基本式 1]のようなフーリエ級数類似の式において、 $x$  に  $\pi/4$  や  $\pi/6$  や  $\pi/7$  やその他いろいろな値を代入することで、無数の 2 次体ゼータが生まれてくる。

その辺に関しては、このゼータの香りの漂う～シリーズを通して、何度も何度もやってきたことであり、三角関数と双曲線関数の融合域でも全く同じであるから、あえてこの分野で 2 次体ゼータの特殊値に対応した極限公式を出そうとは思わない。虚 2 次体  $Q(\sqrt{-2})$  ゼータあたりを出せば、具体例としてもう十分という感じである。 $\zeta(s)$  も  $L(s)$  も巨大ゼータ、ディリクレの  $L$  関数  $L(\chi, s)$  の特殊例であり、 $\zeta(s)$  は実 2 次体ゼータの代表選手、 $L(s)$  は虚 2 次体ゼータの代表選手である。

なお、もちろん  $L(\chi, s)$  のリーマン予想は証明されていない。

- 証明中の次式を再掲。

$$\frac{1}{e^a - 1} + \frac{1}{e^{3a} - 1} - \frac{1}{e^{5a} - 1} - \frac{1}{e^{7a} - 1} + \frac{1}{e^{9a} - 1} + \frac{1}{e^{11a} - 1} - \frac{1}{e^{13a} - 1} - \frac{1}{e^{15a} - 1} + + - - \cdot \cdot = \frac{\text{cha}}{\text{ch}2a} + \frac{\text{ch}2a}{\text{ch}4a} + \frac{\text{ch}3a}{\text{ch}6a} + \frac{\text{ch}4a}{\text{ch}8a} + \cdot \cdot$$

( $a > 0$ )

この式自体、すばらしい恒等式となっている。

- 吉田正章氏のエッセイ再び。 [46306\\_j5.pdf](#)

少し前に紹介した数学者・吉田正章氏の名エッセイを再び見たい。一部を抜き取った。

\*\*\*\*\*

．．．

以上、cpu 性能が悪くても（興味さえあれば）数学はできることを私の経験を例に説明した。次に大多数のそのような人に何とか生き延びるコツを伝授する。

第一に、既成の狭い分野の専門家にならぬことである。そうなるためには専門書や論文を次々と読まねばならず、苦しいのに報いは少ないからである。といっても幅広く本を読んで理解するなんて芸当はできないのだから、友達を多く持ち、いろいろなことに興味をもって、知識を交換するのがよい。

第二に、人と同じことをやっては cpu 秀才にかなわないのだから、人と違ったことをやる。はやっている数学の後追いはしない。

第三に、あることを習ったときそれがどんなに簡単に見えてもすぐに分かったと思わないことである。分かったと思うとその先に進まざるをえないが、分からないことを見付ければより基本的問題に気づく可能性がある。cpu 秀才は分かることに慣れているが、鈍才は分からないことに慣れているのが強みである。

\*\*\*\*\*

上で一見してわかりにくく、しかし私が最重要と思うのが「第三」の内容である。これはなかなかいえず、また創造や発見に関し私がいつも思っていることでもある。これは超簡単にいえば“よく考え、ゆっくり進め！”ということである。人は時として最先端の結果に追いつかないと発見などできない！！と考えてしまいがちだが、それは間違いである。数学者は急ぐから多くのことを歴史的にも現代でも見落とししながら進んでいる。我々凡人は彼らが見落としした多くのことを拾っていくのがよい。

●次の二式を眺めよう。

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} \frac{8a^4}{9} \left( \frac{1^3}{\operatorname{ch}^2 a} + \frac{2^3}{\operatorname{ch}^2 2a} + \frac{3^3}{\operatorname{ch}^2 3a} + \frac{4^3}{\operatorname{ch}^2 4a} + \cdots \right) \quad \text{----<S6-24>}$$

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} \frac{2a^4}{3} \left( \frac{1^3}{\operatorname{sh}^2 a} + \frac{2^3}{\operatorname{sh}^2 2a} + \frac{3^3}{\operatorname{sh}^2 3a} + \frac{4^3}{\operatorname{sh}^2 4a} + \cdots \right) \quad \text{----<S6-25>}$$

それぞれ単独でもきれいだが、二式を比べることで余計に趣が感じられる。

=====

2025. 10. 11 杉岡幹生

sugioka\_m@mvp.biglobe.ne.jp

<参考文献>

- ・「マグロウヒル 数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)
- ・「解決！フェルマーの最終定理」(加藤和也著、日本評論社)