＜ 三角関数と双曲線関数の融合域（その４６）＞

極限公式を新たに四つ見出したので下方に青色式で示す。$\phi(0)=1/2$ のもの三つと $L(0)=1/2$ のもの一つである。

同公式は多く出すぎたため、紙幅節約のこともあって、今回のものに関係のないグループでは最新のもの二つずつのみを示した。

なお、前回発見の＜T１－１＞は、他式との整合性から＜T２－１＞に記号を変えたので了解ください。

以降において、L(0)～L(5)、$\phi(-1)$～$\zeta(4)$ とは次の通り。

$L(0)=$ “$1 -1 +1 -1 +-\cdots$” $=1/2$

$L(1)=1 -1/3 +1/5 -1/7 +-\cdots=\pi/4$

$L(2)=1 -1/3^2 +1/5^2 -1/7^2 +-\cdots=$ 非明示（カタランの定数）

$L(3)$ は $L(3)=1 -1/3^3 +1/5^3 -1/7^3 +-\cdots=\pi^3/32$

$L(4)=1 -1/3^4 +1/5^4 -1/7^4 +-\cdots=$ 非明示

$L(5)$ は $L(5)=1 -1/3^5 +1/5^5 -1/7^5 +-\cdots=5\pi^5/1536$

$\phi(-1)=$ “$1 -2 +3 -4 +-\cdots$” $=1/4$

$\phi(0)=$ “$1 -1 +1 -1 +-\cdots$” $=1/2$

$\zeta(2)=1 +1/2^2 +1/3^2 +1/4^2 +\cdots=\pi^2/6$

$(3/4)\zeta(2)=1 +1/3^2 +1/5^2 +1/7^2 +\cdots=\pi^2/8$（一つ上と実質は同じ）

$\zeta(3)=1 +1/2^3 +1/3^3 +1/4^3 +\cdots=$ 非明示

$\zeta(4)=1 +1/2^4 +1/3^4 +1/4^4 +\cdots=\pi^4/90$

注意：ここで $\phi(s)$ は $\phi(s)=1 -2^{-s} +3^{-s} -4^{-s} +5^{-s} -6^{-s} +-\cdots=(1-2^{1-s})\zeta(s)$ である。

よって例えば s=-1 のとき、$\phi(-1)=$ “$1 -2 +3 -4 +-\cdots$” $=(1-2^2)\zeta(-1)=1/4$ となる。

$\zeta(-1)=-1/12$ を用いた。

以降では、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。a, x は任意の実数である。$\tan^{-1}$, th^{-1} はそれぞれ arctan,arctanh である。log は自然対数、e は自然対数の底。sin, cos, tan は通常の表記である。

なお、lim での a->+0 は a をプラス側から 0 に近づける意味であり、a->±0 は a をプラス側,マイナス側どちらから 0 に近づけてもＯＫの意味である。

＝＝＝

＜ 極限公式 ＞

◆$2^{1/2}$ ／$2^{1/4}$ ／2^{-1}／2^2 極限公式

$$\frac{1}{2}=\lim_{a\to+0}\log\left((1+a^2\cdot e^{-a})(1+a^2\cdot e^{-3a})^3(1+a^2\cdot e^{-5a})^5(1+a^2\cdot e^{-7a})^7\cdots\right)\quad \text{--＜O1－8＞}$$

$$4=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin a}{\mathrm{ch}a-\sin a}\right)^{e^{-a}}\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\sin a}{\mathrm{ch}2a-\sin a}\right)^{e^{-2a}}\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin a}{\mathrm{ch}3a-\sin a}\right)^{e^{-3a}}\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\sin a}{\mathrm{ch}4a-\sin a}\right)^{e^{-4a}}\cdot\cdot$$ --＜Q1＞

◆L(2)極限公式

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}2a\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}4a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}8a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}12a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}16a}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --＜S1－9＞

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}2a^2\left(\frac{1}{\mathrm{ch}3a}+\frac{2}{\mathrm{ch}5a}+\frac{3}{\mathrm{ch}7a}+\frac{4}{\mathrm{ch}9a}+\frac{5}{\mathrm{ch}11a}+\frac{6}{\mathrm{ch}13a}+\cdot\cdot\right)$$ ----＜S1－10＞

◆$\frac{\pi^2}{8}$極限公式　(3ζ(2)/4 極限公式)

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}9a\left(\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}3a}\right)+3\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}9a}\right)+5\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}15a}\right)+7\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}21a}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --＜S2－11＞

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}16a\left(\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}4a}\right)+3\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}12a}\right)+5\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}20a}\right)+7\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}28a}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --＜S2－12＞

◆$\frac{\pi^2}{6}$極限公式（ζ(2)極限公式）

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}2a\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-3a})(1-e^{-5a})(1-e^{-7a})\cdot\cdot}\right)$$ ----＜S3－11＞

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}a\cdot\log\left(2(1+e^{-a})^2(1+e^{-2a})^2(1+e^{-3a})^2(1+e^{-4a})^2\cdot\cdot\right)$$ ----＜S3－12＞

◆$\frac{\pi}{4}$極限公式　(L(1)極限公式)

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}8a\left(\frac{\mathrm{ch}4a}{\mathrm{ch}8a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}12a}{\mathrm{ch}24a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}20a}{\mathrm{ch}40a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}28a}{\mathrm{ch}56a+\mathrm{ch}a}+\cdot\cdot\right)$$ ---＜S4－21＞

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}16a\left(\frac{\mathrm{ch}8a}{\mathrm{ch}16a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}24a}{\mathrm{ch}48a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}40a}{\mathrm{ch}80a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}56a}{\mathrm{ch}112a+\mathrm{ch}a}+\cdot\cdot\right)$$ ---＜S4－22＞

◆log2 極限公式

$$\log 2 = \lim_{a\to+0} 2a\left(\frac{e^{-2a}+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a}+\frac{e^{-6a}+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a}+\frac{e^{-10a}+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}10a+\mathrm{ch}a}+\frac{e^{-14a}+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}14a+\mathrm{ch}a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S5-7>}$$

$$\log 2 = \lim_{a\to+0}\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{1}{e^{a}}\cdot \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}a}\right)+\frac{1}{e^{2a}}\cdot \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}2a}\right)+\frac{1}{e^{3a}}\cdot \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}3a}\right)+\frac{1}{e^{4a}}\cdot \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}4a}\right)+\cdot\cdot\right) \quad \text{--<5-8>}$$

◆ζ(3)極限公式

$$\zeta(3) = \lim_{a\to+0}\frac{16a^2}{3}\log\left(2(1+e^{-2a})^2(1+e^{-4a})^3(1+e^{-6a})^4(1+e^{-8a})^5\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S6-22>}$$

$$\zeta(3) = \lim_{a\to+0}\frac{16a^2}{3}\log\left((1+e^{a})(1+e^{-a})^2(1+e^{-3a})^3(1+e^{-5a})^4\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S6-23>}$$

◆ $\frac{\pi^3}{32}$極限公式　（L（3）極限公式）

$$\frac{\pi^3}{32} = \lim_{a\to+0} 2a^2\left(\tan^{-1}(e^{a})+3\tan^{-1}(e^{-a})+5\tan^{-1}(e^{-3a})+7\tan^{-1}(e^{-5a})+\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S7-7>}$$

$$\frac{\pi^3}{32} = \lim_{a\to+0} 2a^3\left(\frac{2\times1}{\mathrm{ch}5a}+\frac{3\times2}{\mathrm{ch}7a}+\frac{4\times3}{\mathrm{ch}9a}+\frac{5\times4}{\mathrm{ch}11a}+\frac{6\times5}{\mathrm{ch}13a}+\frac{7\times6}{\mathrm{ch}15a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S7-8>}$$

◆ e^{π}極限公式

$$e^{\pi} = \lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin a}{\mathrm{ch}a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\sin a}{\mathrm{ch}2a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin a}{\mathrm{ch}3a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\sin a}{\mathrm{ch}4a-\sin a}\right)\cdot\cdot \quad \text{--<S8-1>}$$

$$e^{\pi} = \lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin a}{\mathrm{ch}a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin a}{\mathrm{ch}3a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}5a+\sin a}{\mathrm{ch}5a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}7a+\sin a}{\mathrm{ch}7a-\sin a}\right)^2\cdot\cdot \quad \text{--<S8-2>}$$

◆ $e^{\pi x}$［恒等］極限公式

$$e^{\pi x} = \lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin ax}{\mathrm{ch}a-\sin ax}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\sin ax}{\mathrm{ch}2a-\sin ax}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin ax}{\mathrm{ch}3a-\sin ax}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\sin ax}{\mathrm{ch}4a-\sin ax}\right)\cdot\cdot \quad \text{--<S8-1-2>}$$

$$e^{\pi x} = \lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin ax}{\mathrm{ch}a-\sin ax}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin ax}{\mathrm{ch}3a-\sin ax}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}5a+\sin ax}{\mathrm{ch}5a-\sin ax}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}7a+\sin ax}{\mathrm{ch}7a-\sin ax}\right)^2\cdot\cdot \quad \text{--<S8-2-2>}$$

◆　ゼータの香りの漂う公式の極限公式

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{\mathrm{sh}(3\pi/2)-\mathrm{sh}(\pi/2)}{\mathrm{sh}(2\pi)}=\frac{1}{1^2+1}-\frac{3}{3^2+1}+\frac{5}{5^2+1}-\frac{7}{7^2+1}+-\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0} a\left(\frac{\mathrm{sh}2a\cdot\sin a}{\mathrm{ch}4a+\mathrm{ch}2a}+\frac{\mathrm{sh}3a\cdot\sin 2a}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}2a}+\frac{\mathrm{sh}4a\cdot\sin 3a}{\mathrm{ch}8a+\mathrm{ch}2a}+\frac{\mathrm{sh}5a\cdot\sin 4a}{\mathrm{ch}10a+\mathrm{ch}2a}+\cdot\cdot\right)$$ ---＜S9－12＞

$$\frac{1}{1^2+1}-\frac{1}{3^2+1}+\frac{1}{5^2+1}-\frac{1}{7^2+1}+-\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to\pm0}\left(\sin a\cdot\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{ch}a}\right)+\sin 3a\cdot\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{ch}3a}\right)+\sin 5a\cdot\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{ch}5a}\right)+\sin 7a\cdot\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{ch}7a}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --＜S9－13＞

◆π√2/4 極限公式（虚 2 次体 Q(√−2) ゼータ L2(1) 極限公式）

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{4}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}++--\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0} 2a\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a}+\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{ch}6a}+\frac{\mathrm{ch}5a}{\mathrm{ch}10a}+\frac{\mathrm{ch}7a}{\mathrm{ch}14a}+\cdot\cdot\right)$$ ----＜S10－1＞

◆(1/√2) log(1+√2) 極限公式（実 2 次体 Q(√2) ゼータ L1(1) 極限公式）

$$\frac{\log(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}-\frac{1}{13}+\frac{1}{15}+--+\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0} 2a\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}2a}+\frac{\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}6a}+\frac{\mathrm{sh}5a}{\mathrm{ch}10a}+\frac{\mathrm{sh}7a}{\mathrm{ch}14a}+\cdot\cdot\right)$$ ----＜S11－1＞

◆L(4)極限公式

$$L(4)=\lim_{a\to\pm0}\frac{2a^4}{3}\left(\frac{1\times2\times3}{\mathrm{ch}3a}+\frac{2\times3\times5}{\mathrm{ch}5a}+\frac{3\times4\times7}{\mathrm{ch}7a}+\frac{4\times5\times9}{\mathrm{ch}9a}+\frac{5\times6\times11}{\mathrm{ch}11a}+\frac{6\times7\times13}{\mathrm{ch}13a}+\cdot\cdot\right)$$ --＜S12－1＞

$$L(4)=\lim_{a\to\pm0}\frac{4a^4}{3}\left(\frac{3\times2\times1}{\mathrm{ch}7a}+\frac{4\times3\times2}{\mathrm{ch}9a}+\frac{5\times4\times3}{\mathrm{ch}11a}+\frac{6\times5\times4}{\mathrm{ch}13a}+\frac{7\times6\times5}{\mathrm{ch}15a}+\frac{8\times7\times6}{\mathrm{ch}17a}+\cdot\cdot\right)$$ --＜S12－2＞

◆$\frac{\pi^4}{90}$極限公式　（ζ(4) 極限公式）

$$\frac{\pi^4}{90}=\lim_{a\to+0}\frac{32a^4}{45}\left(\frac{1\times2\times3}{\mathrm{sh}3a}+\frac{2\times3\times5}{\mathrm{sh}5a}+\frac{3\times4\times7}{\mathrm{sh}7a}+\frac{4\times5\times9}{\mathrm{sh}9a}+\frac{5\times6\times11}{\mathrm{sh}11a}+\frac{6\times7\times13}{\mathrm{sh}13a}+\cdot\cdot\right)$$ --＜S13－1＞

◆ $\frac{5\pi^5}{1536}$極限公式　(L(5)極限公式)

$$\frac{5\pi^5}{1536}=\lim_{a\to+0}\frac{2a^5}{3}\left(\frac{4\times3\times2\times1}{\mathrm{ch}9a}+\frac{5\times4\times3\times2}{\mathrm{ch}11a}+\frac{6\times5\times4\times3}{\mathrm{ch}13a}+\frac{7\times6\times5\times4}{\mathrm{ch}15a}+\frac{8\times7\times6\times5}{\mathrm{ch}17a}+\cdot\cdot\right)\quad\text{--<S14-1>}$$

◆ $\phi(0)=1/2$極限公式

$$1/2=\lim_{a\to+0}a^2\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}^3a}+\frac{2\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}^32a}+\frac{3\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}^33a}+\frac{4\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}^34a}+\cdot\cdot\right)\quad\text{-----<T1-1>}$$

$$1/2=\lim_{a\to+0}a\left(\frac{1}{\mathrm{ch}^2a}+\frac{1}{\mathrm{ch}^23a}+\frac{1}{\mathrm{ch}^25a}+\frac{1}{\mathrm{ch}^27a}+\cdot\cdot\right)\quad\text{----<T1-2>}$$

$$1/2=\lim_{a\to+0}\frac{a}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}^2a}+\frac{1}{\mathrm{ch}^22a}+\frac{1}{\mathrm{ch}^23a}+\frac{1}{\mathrm{ch}^24a}+\cdot\cdot\right)\quad\text{----<T1-3>}$$

◆ $\phi(-1)=1/4$極限公式

$$1/4=\lim_{a\to\pm0}a\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}^3a}+\frac{\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}^33a}+\frac{\mathrm{sh}5a}{\mathrm{ch}^35a}+\frac{\mathrm{sh}7a}{\mathrm{ch}^37a}+\cdot\cdot\right)\quad\text{----<T2-1>}$$

◆ $L(0)=1/2$極限公式

$$1/2=\lim_{a\to\pm0}a\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}^2a}+\frac{\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}^23a}+\frac{\mathrm{sh}5a}{\mathrm{ch}^25a}+\frac{\mathrm{sh}7a}{\mathrm{ch}^27a}+\cdot\cdot\right)\quad\text{----<U1-1>}$$

$$1/2=\lim_{a\to\pm0}\frac{a}{2}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}^2a}+\frac{\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}^22a}+\frac{\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}^23a}+\frac{\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}^24a}+\cdot\cdot\right)\quad\text{----<U1-2>}$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

　これらの四つ青色式が得られた。どれも簡明な形をしていて美しい。Wolfram Alpha の数値検証でも、a への様々な小さな値の代入により式の成立を確認している。

ここで、$\phi(0)=1/2$ は $\phi(s)=1-2^{-s}+3^{-s}-4^{-s}+-\cdot\cdot=(1-2^{1-s})\zeta(s)$ の s を 0 としたときの結果(値)である。
一方、$L(0)=1/2$ は $L(s)=1-1/3^s+1/5^s-1/7^s+-\cdot\cdot$ の s を 0 としたときの結果(値)である。
　両者はどちらも 1/2 だが、その意味合いはまったく異なる。

　これらの式の証明は、前回分と類似の方法で出るので略す。

　最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

＝＝

●φ(0)の結果を眺めよう。

◆　φ(0)＝1/2極限公式

$$1/2=\lim_{a\to+0} a^2\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}^3a}+\frac{2\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}^32a}+\frac{3\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}^33a}+\frac{4\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}^34a}+\cdot\cdot\right)$$ ----<T1−1>

$$1/2=\lim_{a\to+0} a\left(\frac{1}{\mathrm{ch}^2a}+\frac{1}{\mathrm{ch}^23a}+\frac{1}{\mathrm{ch}^25a}+\frac{1}{\mathrm{ch}^27a}+\cdot\cdot\right)$$ ----<T1−2>

$$1/2=\lim_{a\to+0} \frac{a}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}^2a}+\frac{1}{\mathrm{ch}^22a}+\frac{1}{\mathrm{ch}^23a}+\frac{1}{\mathrm{ch}^24a}+\cdot\cdot\right)$$ ----<T1−3>

　いずれもきれいである。右辺は、a^2 や a が () に掛かっていて、一見すると 0 に収束するのではないか？と思うが、すべて 1/2 に収束する。Wolfram Alpha で、a に様々な小さな値を代入しそして () 内は徐々に項数を増やすという数値検証を行っていると、だんだんとこれらの式のもつ性質が感覚でつかめてくる。

●上の<T１－２>と<T１－３>を見比べたい。

　前者は（ ）の級数が１ ３ ５ ７・・と並び、後者は１ ２ ３ ４・・と並んでいる。そして（ ）の級数に掛かるのは前者が a で後者がその半分の a/2 となっている。この光景はこれまで多くの極限公式で見てきた光景と同じである。次の二式でもそうなっている。

◆　L(0)＝1/2極限公式

$$1/2=\lim_{a\to\pm0} a\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}^2a}+\frac{\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}^23a}+\frac{\mathrm{sh}5a}{\mathrm{ch}^25a}+\frac{\mathrm{sh}7a}{\mathrm{ch}^27a}+\cdot\cdot\right)$$ ----<U1−1>

$$1/2=\lim_{a\to\pm0} \frac{a}{2}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}^2a}+\frac{\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}^22a}+\frac{\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}^23a}+\frac{\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}^24a}+\cdot\cdot\right)$$ ----<U1−2>

この興味ある事実は局所的には（各式では）おそらく証明できるだろうが、一般的な証明は難しい気がする。

●二つ上で数値検証に言及した。その数値検証で思うのは、昔の数学者はどうやって数値検証（検算）していたのだろう？ということである。それはこれまで数値検証に多大な時間を費やし苦労してきたので、常に思ってきたことである。

　オイラーはどうやっていたのか？リーマンは？ラマヌジャンは？
アーベルはどうやって検算していたのか？ガウスは？

　それらの検算過程は表に出ることがないので、余計に私は気になる。彼らの時代に、コンピュータ、電卓はない。Excel もない。もちろん Wolfram Alpha などない。

　ガウスは手記からその検算の概要を少し窺い知ることができるが（「近世数学史談」（高木貞治著、共立出版））、それは想像を絶する手計算である。高木氏が「無限軌道の上を走る」と面白い表現で述べている箇所もある。

　そういう数学史における裏側の大事なことに興味や関心を示す(現代)数学者は少ないように見えるのだが、それがどうも私には不可解である。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2025.9.14 杉岡幹生

sugioka_m@mvb.biglobe.ne.jp

＜参考文献＞

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)

・「数学の夢　素数からのひろがり」（黒川信重著、岩波書店）

・「近世数学史談」(高木貞治著、共立出版)