

＜ 三角関数と双曲線関数の融合域（その 4 5）＞ rev0.1

新種の極限公式が二つ得られたので下方に青色式で示す。今回は、ゼータの負(0も含む)の特殊値とでもいうべき $L(0)=1/2$ や $\phi(-1)=1/4$ に対する式が得られた（ $\phi(-1)$ の意味は下記の注記：を参照）。すなわち、極限公式はゼータの負の値の方面にも延びていることがわかった。

この“極限公式”と名付けた興味ある公式は昨年末から今年5月にかけて多数見出したものだが、その5月のこちらの継続の流れとなる。

なお、これまで同公式は多く出すぎたため、紙幅節約のこともあって、今回のものと関係のない他グループでは最新のもの二つずつのみを示した。

ところで、前回までの「値＝無限級数」という形の恒等式(任意のaで成立)は、ほとんどすべて自明に近い！と自ら気づいた(つまり初等的な証明に気づいた)。よってそれらはそれほど価値ある（ふしぎな）式ではないと考えられるので報告とさせていただく（後述）。申し訳ありませんが、了解願います。

以降において、 $L(1) \sim L(5)$ 、 $\zeta(2) \sim \zeta(4)$ と $L(0)$ 、 $\phi(-1)$ は次の通り。

$$L(0) = "1 -1 +1 -1 +- \dots" = 1/2$$

$$L(1) = 1 -1/3 +1/5 -1/7 +- \dots = \pi/4$$

$$L(2) = 1 -1/3^2 +1/5^2 -1/7^2 +- \dots = \text{非明示 (カタランの定数)}$$

$$L(3) \text{ は } L(3) = 1 -1/3^3 +1/5^3 -1/7^3 +- \dots = \pi^3/32$$

$$L(4) = 1 -1/3^4 +1/5^4 -1/7^4 +- \dots = \text{非明示}$$

$$L(5) \text{ は } L(5) = 1 -1/3^5 +1/5^5 -1/7^5 +- \dots = 5\pi^5/1536$$

$$\phi(-1) = "1 -2 +3 -4 +- \dots" = 1/4$$

$$\zeta(2) = 1 +1/2^2 +1/3^2 +1/4^2 + \dots = \pi^2/6$$

$$(3/4)\zeta(2) = 1 +1/3^2 +1/5^2 +1/7^2 + \dots = \pi^2/8 \text{ (一つ上と実質は同じ)}$$

$$\zeta(3) = 1 +1/2^3 +1/3^3 +1/4^3 + \dots = \text{非明示}$$

$$\zeta(4) = 1 +1/2^4 +1/3^4 +1/4^4 + \dots = \pi^4/90$$

注意：ここで $\phi(s)$ は $\phi(s) = 1 -2^{-s} +3^{-s} -4^{-s} +5^{-s} -6^{-s} +- \dots = (1-2^{1-s})\zeta(s)$ である。

よって例えば $s=-1$ のとき、 $\phi(-1) = "1 -2 +3 -4 +- \dots" = (1-2^2)\zeta(-1) = 1/4$ となる。

$\zeta(-1) = -1/12$ を用いた。

以降では、双曲線関数 $\sinh$, $\cosh$, $\tanh$ はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、 $\text{sh}2a$ は $\sinh(2a)$ のことである。 a , x は任意の実数である。 $\tan^{-1}$, th^{-1} はそれぞれ $\arctan$, arctanh である。 $\log$ は自然対数、 e は自然対数の底。 $\sin$, $\cos$, $\tan$ は通常表記である。

なお、 $\lim$ での $a \rightarrow +0$ は a をプラス側から 0 に近づける意味であり、 $a \rightarrow \pm 0$ は a をプラス側、マイナス側どちらから 0 に近づけても OKの意味である。

=====

< 極限公式 >

◆ $2^{1/2} / 2^{1/4} / 2^{-1} / 2^2$ 極限公式

$$\frac{1}{2} = \lim_{a \rightarrow +0} \log \left((1 + a^2 \cdot e^{-a}) (1 + a^2 \cdot e^{-3a})^3 (1 + a^2 \cdot e^{-5a})^5 (1 + a^2 \cdot e^{-7a})^7 \cdot \cdot \right) \quad \text{--<O1-8>}$$

$$4 = \lim_{a \rightarrow +0} \left(\frac{\text{cha} + \sin a}{\text{cha} - \sin a} \right)^{e^{-a}} \left(\frac{\text{ch2a} + \sin a}{\text{ch2a} - \sin a} \right)^{e^{-2a}} \left(\frac{\text{ch3a} + \sin a}{\text{ch3a} - \sin a} \right)^{e^{-3a}} \left(\frac{\text{ch4a} + \sin a}{\text{ch4a} - \sin a} \right)^{e^{-4a}} \cdot \cdot \quad \text{--<Q1>}$$

◆L(2)極限公式

$$L(2) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} 2a \left(\tan^{-1} \left(\frac{\text{cha}}{\text{sh4a}} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{cha}}{\text{sh8a}} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{cha}}{\text{sh12a}} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{cha}}{\text{sh16a}} \right) + \cdot \cdot \right) \quad \text{--<S1-9>}$$

$$L(2) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} 2a^2 \left(\frac{1}{\text{ch3a}} + \frac{2}{\text{ch5a}} + \frac{3}{\text{ch7a}} + \frac{4}{\text{ch9a}} + \frac{5}{\text{ch11a}} + \frac{6}{\text{ch13a}} + \cdot \cdot \right) \quad \text{----<S1-10>}$$

◆ $\frac{\pi^2}{8}$ 極限公式 (3 ζ (2) / 4 極限公式)

$$\frac{\pi^2}{8} = \lim_{a \rightarrow +0} 9a \left(\text{th}^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{sh3a}} \right) + 3\text{th}^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{sh9a}} \right) + 5\text{th}^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{sh15a}} \right) + 7\text{th}^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{sh21a}} \right) + \cdot \cdot \right) \quad \text{--<S2-11>}$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \lim_{a \rightarrow +0} 16a \left(\text{th}^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{sh4a}} \right) + 3\text{th}^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{sh12a}} \right) + 5\text{th}^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{sh20a}} \right) + 7\text{th}^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{sh28a}} \right) + \cdot \cdot \right) \quad \text{--<S2-12>}$$

◆ $\frac{\pi^2}{6}$ 極限公式 (ζ (2) 極限公式)

$$\frac{\pi^2}{6} = \lim_{a \rightarrow +0} 2a \cdot \log \left(\frac{1}{(1 - e^{-a})(1 - e^{-3a})(1 - e^{-5a})(1 - e^{-7a}) \cdot \cdot} \right) \quad \text{----<S3-11>}$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \lim_{a \rightarrow +0} a \cdot \log \left(2(1 + e^{-a})^2(1 + e^{-2a})^2(1 + e^{-3a})^2(1 + e^{-4a})^2 \cdot \cdot \right) \quad \text{----<S3-12>}$$

◆ $\frac{\pi}{4}$ 極限公式 (L(1) 極限公式)

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} 8a \left(\frac{\text{ch}4a}{\text{ch}8a+\text{cha}} + \frac{\text{ch}12a}{\text{ch}24a+\text{cha}} + \frac{\text{ch}20a}{\text{ch}40a+\text{cha}} + \frac{\text{ch}28a}{\text{ch}56a+\text{cha}} + \cdot \cdot \right) \quad \text{---<S4-21>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} 16a \left(\frac{\text{ch}8a}{\text{ch}16a+\text{cha}} + \frac{\text{ch}24a}{\text{ch}48a+\text{cha}} + \frac{\text{ch}40a}{\text{ch}80a+\text{cha}} + \frac{\text{ch}56a}{\text{ch}112a+\text{cha}} + \cdot \cdot \right) \quad \text{---<S4-22>}$$

◆ log2 極限公式

$$\log 2 = \lim_{a \rightarrow +0} 2a \left(\frac{e^{-2a}+\text{cha}}{\text{ch}2a+\text{cha}} + \frac{e^{-6a}+\text{cha}}{\text{ch}6a+\text{cha}} + \frac{e^{-10a}+\text{cha}}{\text{ch}10a+\text{cha}} + \frac{e^{-14a}+\text{cha}}{\text{ch}14a+\text{cha}} + \cdot \cdot \right) \quad \text{---<S5-7>}$$

$$\log 2 = \lim_{a \rightarrow +0} \left(\frac{a}{2} \right) \left(\frac{1}{e^a} \cdot \text{th}^{-1} \left(\frac{1}{\text{cha}} \right) + \frac{1}{e^{2a}} \cdot \text{th}^{-1} \left(\frac{1}{\text{ch}2a} \right) + \frac{1}{e^{3a}} \cdot \text{th}^{-1} \left(\frac{1}{\text{ch}3a} \right) + \frac{1}{e^{4a}} \cdot \text{th}^{-1} \left(\frac{1}{\text{ch}4a} \right) + \cdot \cdot \right) \quad \text{--<5-8>}$$

◆ ζ(3) 極限公式

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{16a^2}{3} \log(2(1+e^{-2a})^2(1+e^{-4a})^3(1+e^{-6a})^4(1+e^{-8a})^5 \cdot \cdot) \quad \text{---<S6-22>}$$

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{16a^2}{3} \log((1+e^a)(1+e^{-a})^2(1+e^{-3a})^3(1+e^{-5a})^4 \cdot \cdot) \quad \text{---<S6-23>}$$

◆ $\frac{\pi^3}{32}$ 極限公式 (L(3) 極限公式)

$$\frac{\pi^3}{32} = \lim_{a \rightarrow +0} 2a^2 (\tan^{-1}(e^a) + 3\tan^{-1}(e^{-a}) + 5\tan^{-1}(e^{-3a}) + 7\tan^{-1}(e^{-5a}) + \cdot \cdot) \quad \text{--<S7-7>}$$

$$\frac{\pi^3}{32} = \lim_{a \rightarrow +0} 2a^3 \left(\frac{2 \times 1}{\text{ch}5a} + \frac{3 \times 2}{\text{ch}7a} + \frac{4 \times 3}{\text{ch}9a} + \frac{5 \times 4}{\text{ch}11a} + \frac{6 \times 5}{\text{ch}13a} + \frac{7 \times 6}{\text{ch}15a} + \cdot \cdot \right) \quad \text{--<S7-8>}$$

◆ e^π 極限公式

$$e^\pi = \lim_{a \rightarrow +0} \left(\frac{\text{cha}+\sin a}{\text{cha}-\sin a} \right) \left(\frac{\text{ch}2a+\sin a}{\text{ch}2a-\sin a} \right) \left(\frac{\text{ch}3a+\sin a}{\text{ch}3a-\sin a} \right) \left(\frac{\text{ch}4a+\sin a}{\text{ch}4a-\sin a} \right) \cdot \cdot \quad \text{--<S8-1>}$$

$$e^\pi = \lim_{a \rightarrow +0} \left(\frac{\text{cha}+\sin a}{\text{cha}-\sin a} \right)^2 \left(\frac{\text{ch}3a+\sin a}{\text{ch}3a-\sin a} \right)^2 \left(\frac{\text{ch}5a+\sin a}{\text{ch}5a-\sin a} \right)^2 \left(\frac{\text{ch}7a+\sin a}{\text{ch}7a-\sin a} \right)^2 \cdot \cdot \quad \text{--<S8-2>}$$

◆ $e^{\pi x}$ [恒等] 極限公式

$$e^{\pi x} = \lim_{a \rightarrow +0} \left(\frac{\text{cha} + \sin ax}{\text{cha} - \sin ax} \right) \left(\frac{\text{ch}2a + \sin ax}{\text{ch}2a - \sin ax} \right) \left(\frac{\text{ch}3a + \sin ax}{\text{ch}3a - \sin ax} \right) \left(\frac{\text{ch}4a + \sin ax}{\text{ch}4a - \sin ax} \right) \cdot \cdot \cdot \text{---} \langle \text{S8-1-2} \rangle$$

$$e^{\pi x} = \lim_{a \rightarrow +0} \left(\frac{\text{cha} + \sin ax}{\text{cha} - \sin ax} \right)^2 \left(\frac{\text{ch}3a + \sin ax}{\text{ch}3a - \sin ax} \right)^2 \left(\frac{\text{ch}5a + \sin ax}{\text{ch}5a - \sin ax} \right)^2 \left(\frac{\text{ch}7a + \sin ax}{\text{ch}7a - \sin ax} \right)^2 \cdot \cdot \cdot \text{---} \langle \text{S8-2-2} \rangle$$

◆ ゼータの香りの漂う公式の極限公式

$$\begin{aligned} \left(\frac{\pi}{2} \right) \frac{\text{sh}(3\pi/2) - \text{sh}(\pi/2)}{\text{sh}(2\pi)} &= \frac{1}{1^2+1} - \frac{3}{3^2+1} + \frac{5}{5^2+1} - \frac{7}{7^2+1} + \cdot \cdot \cdot \\ &= \lim_{a \rightarrow +0} a \left(\frac{\text{sh}2a \cdot \sin a}{\text{ch}4a + \text{ch}2a} + \frac{\text{sh}3a \cdot \sin 2a}{\text{ch}6a + \text{ch}2a} + \frac{\text{sh}4a \cdot \sin 3a}{\text{ch}8a + \text{ch}2a} + \frac{\text{sh}5a \cdot \sin 4a}{\text{ch}10a + \text{ch}2a} + \cdot \cdot \cdot \right) \text{---} \langle \text{S9-12} \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1^2+1} - \frac{1}{3^2+1} + \frac{1}{5^2+1} - \frac{1}{7^2+1} + \cdot \cdot \cdot \\ &= \lim_{a \rightarrow \pm 0} \left(\sin a \cdot \text{th}^{-1} \left(\frac{\sin a}{\text{cha}} \right) + \sin 3a \cdot \text{th}^{-1} \left(\frac{\sin a}{\text{ch}3a} \right) + \sin 5a \cdot \text{th}^{-1} \left(\frac{\sin a}{\text{ch}5a} \right) + \sin 7a \cdot \text{th}^{-1} \left(\frac{\sin a}{\text{ch}7a} \right) + \cdot \cdot \cdot \right) \text{---} \langle \text{S9-13} \rangle \end{aligned}$$

◆ $\pi \sqrt{2}/4$ 極限公式 (虚 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$ ゼータ $L_2(1)$ 極限公式)

$$\begin{aligned} \frac{\pi \sqrt{2}}{4} &= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + + - - \cdot \cdot \cdot \\ &= \lim_{a \rightarrow +0} 2a \left(\frac{\text{cha}}{\text{ch}2a} + \frac{\text{ch}3a}{\text{ch}6a} + \frac{\text{ch}5a}{\text{ch}10a} + \frac{\text{ch}7a}{\text{ch}14a} + \cdot \cdot \cdot \right) \text{----} \langle \text{S10-1} \rangle \end{aligned}$$

◆ $(1/\sqrt{2}) \log(1+\sqrt{2})$ 極限公式 (実 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ゼータ $L_1(1)$ 極限公式)

$$\begin{aligned} \frac{\log(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}} &= 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{15} + - - + \cdot \cdot \cdot \\ &= \lim_{a \rightarrow +0} 2a \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}2a} + \frac{\text{sh}3a}{\text{ch}6a} + \frac{\text{sh}5a}{\text{ch}10a} + \frac{\text{sh}7a}{\text{ch}14a} + \cdot \cdot \cdot \right) \text{----} \langle \text{S11-1} \rangle \end{aligned}$$

◆ $L(4)$ 極限公式

$$L(4) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} \frac{2a^4}{3} \left(\frac{1 \times 2 \times 3}{\text{ch}3a} + \frac{2 \times 3 \times 5}{\text{ch}5a} + \frac{3 \times 4 \times 7}{\text{ch}7a} + \frac{4 \times 5 \times 9}{\text{ch}9a} + \frac{5 \times 6 \times 11}{\text{ch}11a} + \frac{6 \times 7 \times 13}{\text{ch}13a} + \cdot \cdot \cdot \right) \text{---} \langle \text{S12-1} \rangle$$

$$L(4)=\lim_{a\rightarrow\pm0}\frac{4a^4}{3}\left(\frac{3\times2\times1}{\text{ch}7a}+\frac{4\times3\times2}{\text{ch}9a}+\frac{5\times4\times3}{\text{ch}11a}+\frac{6\times5\times4}{\text{ch}13a}+\frac{7\times6\times5}{\text{ch}15a}+\frac{8\times7\times6}{\text{ch}17a}+\cdot\cdot\right) \text{---<S12-2>}$$

$$\blacklozenge\frac{\pi^4}{90}\text{極限公式}\quad(\zeta(4)\text{極限公式})$$

$$\frac{\pi^4}{90}=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{32a^4}{45}\left(\frac{1\times2\times3}{\text{sh}3a}+\frac{2\times3\times5}{\text{sh}5a}+\frac{3\times4\times7}{\text{sh}7a}+\frac{4\times5\times9}{\text{sh}9a}+\frac{5\times6\times11}{\text{sh}11a}+\frac{6\times7\times13}{\text{sh}13a}+\cdot\cdot\right) \text{---<S13-1>}$$

$$\blacklozenge\frac{5\pi^5}{1536}\text{極限公式}\quad(L(5)\text{極限公式})$$

$$\frac{5\pi^5}{1536}=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{2a^5}{3}\left(\frac{4\times3\times2\times1}{\text{ch}9a}+\frac{5\times4\times3\times2}{\text{ch}11a}+\frac{6\times5\times4\times3}{\text{ch}13a}+\frac{7\times6\times5\times4}{\text{ch}15a}+\frac{8\times7\times6\times5}{\text{ch}17a}+\cdot\cdot\right) \text{---<S14-1>}$$

$$\color{blue}\blacklozenge\phi(-1)=1/4\text{極限公式}$$

$$1/4=\lim_{a\rightarrow\pm0}a\left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}^3a}+\frac{\text{sh}3a}{\text{ch}^33a}+\frac{\text{sh}5a}{\text{ch}^35a}+\frac{\text{sh}7a}{\text{ch}^37a}+\cdot\cdot\right) \text{----<T1-1>}$$

$$\color{blue}\blacklozenge L(0)=1/2\text{極限公式}$$

$$1/2=\lim_{a\rightarrow\pm0}a\left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}^2a}+\frac{\text{sh}3a}{\text{ch}^23a}+\frac{\text{sh}5a}{\text{ch}^25a}+\frac{\text{sh}7a}{\text{ch}^27a}+\cdot\cdot\right) \text{----<U1-1>}$$

=====

これらの二つの青色式が得られた。Wolfram Alpha の数値検証でも、a への様々な小さな値の代入により式の成立を確認している。

両者とも簡明な形をしていて美しい。

さて、ここで<U 1－1>の証明を以下に示す。

=====

<U1－1>の証明

次の<2>から出発する。これは2年前の[こちら](#)で示したものである。

$$\frac{1}{\text{sha}}-\frac{3}{\text{sh}3a}+\frac{5}{\text{sh}5a}-\frac{7}{\text{sh}7a}+-\cdot\cdot=\frac{\text{sha}}{\text{ch}^2a}+\frac{\text{sh}3a}{\text{ch}^23a}+\frac{\text{sh}5a}{\text{ch}^25a}+\frac{\text{sh}7a}{\text{ch}^27a}+\cdot\cdot \text{----<2>}$$

(a≠0)

両辺にaを掛けると(左辺は項ごとに掛けていく)、次となる。

$$\frac{1a}{\text{sha}} - \frac{3a}{\text{sh3a}} + \frac{5a}{\text{sh5a}} - \frac{7a}{\text{sh7a}} + \cdots = a \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}^2 a} + \frac{\text{sh3a}}{\text{ch}^2 3a} + \frac{\text{sh5a}}{\text{ch}^2 5a} + \frac{\text{sh7a}}{\text{ch}^2 7a} + \cdots \right)$$

次に a を 0 に近づけていく。左辺はロピタルの定理を使って $L(0)=1/2$ となる。よって、目的の式 $\langle U1-1 \rangle$ に到達した。

$$1/2 = \lim_{a \rightarrow \pm 0} a \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}^2 a} + \frac{\text{sh3a}}{\text{ch}^2 3a} + \frac{\text{sh5a}}{\text{ch}^2 5a} + \frac{\text{sh7a}}{\text{ch}^2 7a} + \cdots \right) \quad \text{---} \langle U1-1 \rangle$$

終わり。

=====

このようにして $\langle U1-1 \rangle$ は得られた。 $\langle T1-1 \rangle$ も似た方法で得られる。

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

=====

●まず冒頭で言及した次のことに関して述べます。

ところで、[前回](#)までの「値＝無限級数」という形の恒等式(任意の a で成立)は、ほとんどすべて自明に近い! と自ら気づきました(つまり初等的な証明に気づいた)。よってそれらはそれほど価値ある(ふしぎな)式ではないと考えられるので報告とさせていただく(後述)。申し訳ありませんが、了解願います。

これに関し、例えば次式をとりあげ、若干説明したい。

$-1 + \text{tha}$

$$= \left(1 - \frac{\text{sh3a}+3\text{sha}}{\text{ch3a}+\text{cha}} \right) + \left(1 - \frac{\text{sh5a}+5\text{sha}}{\text{ch5a}+\text{cha}} \right) + \left(1 - \frac{\text{sh7a}+7\text{sha}}{\text{ch7a}+\text{cha}} \right) + \left(1 - \frac{\text{sh9a}+9\text{sha}}{\text{ch9a}+\text{cha}} \right) + \cdots \quad \text{---} \langle L2 \rangle$$

(a > 0)

私はこれは自明な式ではないと思っていたのだが、じつは右辺において巧妙な変形を発見し、その変形から計算を遂行すると、左辺が自然に出てくることが判明した。例えば、右辺の第一項は次のように変形できる。

$$\left(1 - \frac{\text{sh3a}+3\text{sha}}{\text{ch3a}+\text{cha}} \right) = \left(1 - \frac{\text{sh}(2a+a)+3\text{sh}(2a-a)}{2\text{ch}2a \cdot \text{cha}} \right)$$

分母の変形では双曲線関数の和を積に直す公式を使っている。第二項以降も全て同様の変形を行ってから、加法定理も使って計算していくと多くの相殺が起こり左辺に自然に到達する。したがってこの式はふしぎな式ではなく、それほど価値のある式ではないと考えられる。このようなことなので、前回までの「値＝無限級数」の形の恒等式に関しては、そのように言えますのでご了解願います。

●数学というのは、思い違いというか間違いが起こりやすい学問である。どうしても偏見や思い込みからそうなる。自分では徹底的に検証しているつもりだが、ある程度時間がたつと思ひもかけないミスが判明したりする。おそろしい面があり、気を付けないといけない。

極限公式に関しては、まったくふしぎな式！と現時点では思っているが、もし自明である！とかそんな事実を発見されたら、連絡いただければ幸いです。⇒ sugioka_m@mbv.biglobe.ne.jp 杉岡幹生

●＜S 8—1＞再掲。

$$e^{\pi} = \lim_{a \rightarrow +0} \left(\frac{\operatorname{cha} + \sin a}{\operatorname{cha} - \sin a} \right) \left(\frac{\operatorname{ch2a} + \sin a}{\operatorname{ch2a} - \sin a} \right) \left(\frac{\operatorname{ch3a} + \sin a}{\operatorname{ch3a} - \sin a} \right) \left(\frac{\operatorname{ch4a} + \sin a}{\operatorname{ch4a} - \sin a} \right) \cdot \cdot \cdot \text{---<S8-1>}$$

極限公式はどれもふしぎであるが、これなどは最高にふしぎな式！と思っている。双曲線関数と三角関数が並列に並んでいること自体、異様である。

●今回の二式を眺めたい。

◆ $\phi(-1)=1/4$ 極限公式

$$1/4 = \lim_{a \rightarrow \pm 0} a \left(\frac{\operatorname{sha}}{\operatorname{ch}^3 a} + \frac{\operatorname{sh3a}}{\operatorname{ch}^3 3a} + \frac{\operatorname{sh5a}}{\operatorname{ch}^3 5a} + \frac{\operatorname{sh7a}}{\operatorname{ch}^3 7a} + \cdot \cdot \cdot \right) \text{----<T1-1>}$$

◆ $L(0)=1/2$ 極限公式

$$1/2 = \lim_{a \rightarrow \pm 0} a \left(\frac{\operatorname{sha}}{\operatorname{ch}^2 a} + \frac{\operatorname{sh3a}}{\operatorname{ch}^2 3a} + \frac{\operatorname{sh5a}}{\operatorname{ch}^2 5a} + \frac{\operatorname{sh7a}}{\operatorname{ch}^2 7a} + \cdot \cdot \cdot \right) \text{----<U1-1>}$$

やはりきれいで、ふしぎである。

私は、これまで偏見からゼータの正の値ばかり（例えば、 $L(1)$ とか $\zeta(2)$ とか）を極限公式として出してきた。負の値の方向は、直感で排除していたのだが、あるとき「負の値でもいいけるのではないか？」とふと思い、そして日に日に確信が増してきて、計算を行ったところ実際に成立していることがわかり驚いた。

なお、証明中の[こちら](#)での四式のうち、＜U 1—1＞が出るのは＜2＞のみである。詳しくは述べないが、交代級数というのがゼータではポイントである。

=====

2025. 9. 6 杉岡幹生

sugioka_m@mbv.biglobe.ne.jp

<参考文献>

- ・「マグロウヒル 数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)
- ・「数学の夢 素数からのひろがり」(黒川信重著、岩波書店)

rev0.1 改訂 2025. 9. 14 タイトルの番号を間違えていたので訂正した。つまり＜三角関数と双曲線関数の融合域 その55＞を
＜三角関数と双曲線関数の融合域 その45＞に訂正。