＜ 双曲線ゼータとその派生式 その５４＞

新たに恒等式を二つ見出したので紹介したい。下方青色式の＜Ｌ４＞、＜Ｌ５＞である。

なお、前回までの＜３＞、＜４＞、＜５＞、＜６＞と＜Ａ２＞、＜Ｂ２＞、＜Ｃ２＞、＜Ｄ２＞、そして＜Ｅ１＞、＜Ｅ２＞と＜Ｊ＞は自明に近いと気づき削除したので了解ください。また＜Ｈ＞は＜Ｌ＞と同値と気づいたので＜Ｈ＞も削除しました。

なお、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことであり、tha は tanh(a)のことである。a は任意の実数であり、よって例えば、$(a \neq 0)$は「a は 0 でない任意の実数」を意味する。log は自然対数、e は自然対数の底である。$\tan^{-1}$は arctan、th^{-1}は arctanh。

＝＝

＜ 恒等式 ＞

$$\frac{1}{\mathrm{cha}-1}-\frac{1}{\mathrm{sha}}=2\left(\frac{1}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----}\langle 1\rangle$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}-\frac{1}{\mathrm{cha}+1}=2\left(\frac{1}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----}\langle 2\rangle$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{2\mathrm{th}\left(\frac{a}{2}\right)}-\frac{1}{2}$$

$$=\left(\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}-1\right)-\left(\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}-1\right)+\left(\frac{\mathrm{sh6a}}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}-1\right)-\left(\frac{\mathrm{sh8a}}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}-1\right)+-\cdot\cdot \quad \text{--}\langle 7\text{-}1\rangle$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{th}\left(\frac{a}{2}\right)}{2}$$

$$=\left(1-\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}\right)-\left(1-\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha}}\right)+\left(1-\frac{\mathrm{sh6a}}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}\right)-\left(1-\frac{\mathrm{sh8a}}{\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha}}\right)+-\cdot\cdot \quad \text{--}\langle 7\text{-}2\rangle$$

$$(a>0)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sha}}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh2a}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh4a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh6a}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh8a}}\right)+-\cdot\ \cdot$$ --<B>

$(a \neq 0)$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sha}}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch4a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch6a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch8a}}\right)+\cdot\ \cdot$$ ---<D>

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{(e^{a}-1)}+\frac{1}{2(e^{2a}-1)}+\frac{1}{3(e^{3a}-1)}+\frac{1}{4(e^{4a}-1)}+\cdot\ \cdot$$

$$=\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})}\times\frac{1}{(1-e^{-2a})}\times\frac{1}{(1-e^{-3a})}\times\frac{1}{(1-e^{-4a})}\times\cdot\ \cdot\right)$$ ----<F1>

$(a > 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2(a/2)}=4\mathrm{sha}\left(\frac{\mathrm{sh2a}}{(\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha})^2}+\frac{\mathrm{sh4a}}{(\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha})^2}+\frac{\mathrm{sh6a}}{(\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha})^2}+\frac{\mathrm{sh8a}}{(\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha})^2}+\cdot\ \cdot\right)$$ ---<G1>

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^2(a/2)}=4\mathrm{sha}\left(\frac{\mathrm{sh2a}}{(\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha})^2}+\frac{\mathrm{sh4a}}{(\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha})^2}+\frac{\mathrm{sh6a}}{(\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha})^2}+\frac{\mathrm{sh8a}}{(\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha})^2}+\cdot\ \cdot\right)$$ ---<G2>

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2(a/2)}=4\left(\frac{\mathrm{ch2a}\cdot\mathrm{cha}-1}{(\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha})^2}-\frac{\mathrm{ch4a}\cdot\mathrm{cha}-1}{(\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha})^2}+\frac{\mathrm{ch6a}\cdot\mathrm{cha}-1}{(\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha})^2}-\frac{\mathrm{ch8a}\cdot\mathrm{cha}-1}{(\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha})^2}+-\cdot\ \cdot\right)$$ ---<I1>

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^2(a/2)}=4\left(\frac{\mathrm{ch2a}\cdot\mathrm{cha}+1}{(\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha})^2}-\frac{\mathrm{ch4a}\cdot\mathrm{cha}+1}{(\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha})^2}+\frac{\mathrm{ch6a}\cdot\mathrm{cha}+1}{(\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha})^2}-\frac{\mathrm{ch8a}\cdot\mathrm{cha}+1}{(\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha})^2}+-\cdot\ \cdot\right)$$ ---<I2>

$(a \neq 0)$

$$-\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{th}\left(\frac{a}{2}\right)}{2}$$

$$=\left(1-\frac{\mathrm{sh2a}+2\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}\right)+\left(1-\frac{\mathrm{sh4a}+4\mathrm{sha}}{\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha}}\right)+\left(1-\frac{\mathrm{sh6a}+6\mathrm{sha}}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}\right)+\left(1-\frac{\mathrm{sh8a}+8\mathrm{sha}}{\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha}}\right)+\cdot\ \cdot$$ --<K1>

$(a > 0)$

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\mathrm{th}\left(\frac{a}{2}\right)}$$
$$=\left(1-\frac{\mathrm{sh}2a-2\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}a}\right)+\left(1-\frac{\mathrm{sh}4a-4\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}a}\right)+\left(1-\frac{\mathrm{sh}6a-6\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}a}\right)+\left(1-\frac{\mathrm{sh}8a-8\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}a}\right)+\cdot\cdot \quad \text{--<K2>}$$
$$(a>0)$$

$$2=\left(\frac{e^a}{\mathrm{ch}a}\right)\times\left(\frac{e^a\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a}\right)\times\left(\frac{e^a\mathrm{ch}2a}{\mathrm{ch}3a}\right)\times\left(\frac{e^a\mathrm{ch}3a}{\mathrm{ch}4a}\right)\times\left(\frac{e^a\mathrm{ch}4a}{\mathrm{ch}5a}\right)\times\left(\frac{e^a\mathrm{ch}5a}{\mathrm{ch}6a}\right)\times\cdot\cdot \quad \text{---<L>}$$
$$(a>0)$$

$$-1+\mathrm{th}a$$
$$=\left(1-\frac{\mathrm{sh}3a+3\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}3a+\mathrm{ch}a}\right)+\left(1-\frac{\mathrm{sh}5a+5\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}5a+\mathrm{ch}a}\right)+\left(1-\frac{\mathrm{sh}7a+7\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}7a+\mathrm{ch}a}\right)+\left(1-\frac{\mathrm{sh}9a+9\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}9a+\mathrm{ch}a}\right)+\cdot\cdot \quad \text{--<L2>}$$
$$(a>0)$$

$$1-\mathrm{th}a$$
$$=\left(3-\frac{3\mathrm{sh}3a+\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}3a+\mathrm{ch}a}\right)-\left(5-\frac{5\mathrm{sh}5a+\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}5a+\mathrm{ch}a}\right)+\left(7-\frac{7\mathrm{sh}7a+\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}7a+\mathrm{ch}a}\right)-\left(9-\frac{9\mathrm{sh}9a+\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}9a+\mathrm{ch}a}\right)+-\cdot\cdot \quad \text{--<L3>}$$
$$(a>0)$$

$$\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{th}\left(\frac{a}{2}\right)}{2}$$
$$=\left(2-\frac{2\mathrm{sh}2a+\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a}\right)-\left(4-\frac{4\mathrm{sh}4a+\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}4a+\mathrm{ch}a}\right)+\left(6-\frac{6\mathrm{sh}6a+\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a}\right)-\left(8-\frac{8\mathrm{sh}8a+\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}8a+\mathrm{ch}a}\right)+-\cdot\cdot \quad \text{--<L4>}$$
$$(a>0)$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2\mathrm{th}\left(\frac{a}{2}\right)}$$
$$=\left(2-\frac{2\mathrm{sh}2a-\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}a}\right)-\left(4-\frac{4\mathrm{sh}4a-\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}a}\right)+\left(6-\frac{6\mathrm{sh}6a-\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}a}\right)-\left(8-\frac{8\mathrm{sh}8a-\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}a}\right)+-\cdot\cdot \quad \text{--<L5>}$$
$$(a>0)$$

================================

これら二つの青色式を見出した。いずれも任意の正実数 a で成り立つ恒等式となっている。数値検証でいくつかの具体値を代入して成立することを Wolfram Alpha で確認している。

＜Ｌ４＞、＜Ｌ５＞は面白い形をしている。

ここでは＜Ｌ４＞の証明の概要を示す。

****

＜Ｌ４＞の証明

次の交代級数の変形を行っていく。

$$\frac{\left(-a+\log\left(2(\mathrm{ch}a+\cos x)\right)\right)}{2}-\frac{\left(-2a+\log\left(2(\mathrm{ch}2a+\cos x)\right)\right)}{2}+\frac{\left(-3a+\log\left(2(\mathrm{ch}3a+\cos x)\right)\right)}{2}-\frac{\left(-4a+\log\left(2(\mathrm{ch}4a+\cos x)\right)\right)}{2}+-\cdot\cdot$$

前回の＜ゼータの香りの・・（その３８１）＞の深フーリエ級数の[1]を上記の各項に適用し、ひたすら級数を縦に足し算する形で変形していく（１３年前のこちらの 2012/8/16 の[導出]と同種の方法）。

その結果、次となる。

$$\frac{\left(-a+\log\left(2(\mathrm{ch}a+\cos x)\right)\right)}{2}-\frac{\left(-2a+\log\left(2(\mathrm{ch}2a+\cos x)\right)\right)}{2}+\frac{\left(-3a+\log\left(2(\mathrm{ch}3a+\cos x)\right)\right)}{2}-\frac{\left(-4a+\log\left(2(\mathrm{ch}4a+\cos x)\right)\right)}{2}+-\cdot\cdot$$

$$=\frac{\cos x}{(e^{a}+1)}-\frac{\cos 2x}{2(e^{2a}+1)}+\frac{\cos 3x}{3(e^{3a}+1)}-\frac{\cos 4x}{4(e^{4a}+1)}+-\cdot\cdot$$

上式で x を(a/2)i（i：虚数単位）で置き換える。cos(Ai)＝coshA の公式を使い、例えば、cosx は cosh(a/2) つまり私の記法で ch(a/2)となるのから、結局、次のようになる。

$$\frac{\left(-a+\log\left(2(\mathrm{ch}a+\mathrm{ch}(a/2))\right)\right)}{2}-\frac{\left(-2a+\log\left(2(\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}(a/2))\right)\right)}{2}+\frac{\left(-3a+\log\left(2(\mathrm{ch}3a+\mathrm{ch}(a/2))\right)\right)}{2}-\frac{\left(-4a+\log\left(2(\mathrm{ch}4a+\mathrm{ch}(a/2))\right)\right)}{2}+-\cdot\cdot$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{e^{a/2}}-\frac{1}{2e^{a}}+\frac{1}{3e^{3a/2}}-\frac{1}{4e^{2a}}+-\cdot\cdot\right)$$

＜ゼータの香りの・・（その３８１）＞の深フーリエ級数を考慮し右辺に着目して、上式は次のようになる。

$$\frac{\left(-a+\log\left(2(\mathrm{ch}a+\mathrm{ch}(a/2))\right)\right)}{2}-\frac{\left(-2a+\log\left(2(\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}(a/2))\right)\right)}{2}+\frac{\left(-3a+\log\left(2(\mathrm{ch}3a+\mathrm{ch}(a/2))\right)\right)}{2}-\frac{\left(-4a+\log\left(2(\mathrm{ch}4a+\mathrm{ch}(a/2))\right)\right)}{2}+-\cdot\cdot$$

$$=\frac{\left(-\frac{a}{2}+\log\left(2(\mathrm{ch}(a/2)+1)\right)\right)}{4}$$

a を 2a で置き換えてから、両辺を a に関して微分して（左辺は項別微分）、最後に式を整えれば目標の＜Ｌ４＞に到達する。

終わり。

****

＜Ｌ４＞はこのようにして得られた。途中で、三角関数と双曲線関数における虚数乗法とでもいうべき cos(Ai)＝coshA の関係を使っていることに着目いただきたい。なお、＜Ｌ５＞も類似の方法で得られる。

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

****

●冒頭で「自明に近いと気づき削除した」と述べた件に関しコメントしたい。これまで長く気づかなかったある変形に気づき、多くの式を消すことになった。例えば、前回まで載せていた＜６＞を見たい。

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}=2\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a+cha}}+\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch4a+cha}}+\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch6a+cha}}+\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch8a+cha}}+\cdot\ \cdot\right)\qquad \text{-----}\langle 6\rangle$$

$$(\mathrm{a}\neq 0)$$

この式で左辺を次のように変形した後、両辺に $\mathrm{sh}\left(\frac{\mathrm{a}}{2}\right)$ を掛ける（右辺は各項に掛ける）。

$$\frac{1}{2\mathrm{sh}\left(\frac{\mathrm{a}}{2}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{\mathrm{a}}{2}\right)}=2\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a+cha}}+\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch4a+cha}}+\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch6a+cha}}+\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch8a+cha}}+\cdot\ \cdot\right)\qquad \text{-----}\langle 6\rangle$$

そして下記公式を使って右辺各項の分子では積⇒和に、分母では和⇒積に直してから計算していく。

shx・shy={ch(x+y)−ch(x−y)}/2、　chx・chy={ch(x+y)+ch(x−y)}/2

その結果、＜６＞右辺は $1/(2\mathrm{ch}\left(\frac{\mathrm{a}}{2}\right))$ を残す形となってばたばたとすべて相殺されていく。このようなことになって＜６＞はほぼ自明な式とわかった次第である。どうしてこんな簡単なことに長く気づかなかったのか、情けないことだが、どうも数学というのはある程度の時間がたたないと気づかないことが多い。これは私に能力がないだけのことなのだろうけれども、人間に特有のことであるような気もする。

なお、上方で残った恒等式は、このような簡単な相殺は起こらない堅固な城塞のような式たちだが、どこに特異な変形が隠れているやもしれず、もし読者の方で冒頭の式でこんな変形ができ自明だ！と発見されたら、ぜひ連絡ください。sugioka_m@mvb.biglobe.ne.jp

●冒頭で並べた「値＝無限級数」という形の恒等式は、ある特別な条件に合致した場合にのみ得られる式である。よって昔よく出していた無限級数＝無限級数の恒等式に比べて、数が得られず希少な（貴重な）式といえ、私が最も気に入っている式たちである。しかし導出過程（証明）において対称性が高すぎる形にすると、自明な形に陥ってしまうようだ。究極の対称性の半歩手前の状態がよいようである。その状態でふしぎな式が得られていく。

実験しているうちにだんだんとそんなことがわかってきた。数学は実験しないとわからないことが多い。実験をやり失敗と成功をつづけていると（失敗が多い！）、なにかがぼんやりと見えてくる。また実験していると、予想だにしなかったもの（洞窟）がよく見つかる。その洞窟を進むとまた予想だにしなかったことが・・と、つぎつぎに続いていく。数学は具体を掘ることがすべてであって、実験そのものといえる。

●前回の＜Ｌ３＞も一緒に、＜Ｌ４＞、＜Ｌ５＞を並べよう。

$$1-\mathrm{tha}$$
$$=\left(3-\frac{3\mathrm{sh}3\mathrm{a}+\mathrm{sha}}{\mathrm{ch}3\mathrm{a}+\mathrm{cha}}\right)-\left(5-\frac{5\mathrm{sh}5\mathrm{a}+\mathrm{sha}}{\mathrm{ch}5\mathrm{a}+\mathrm{cha}}\right)+\left(7-\frac{7\mathrm{sh}7\mathrm{a}+\mathrm{sha}}{\mathrm{ch}7\mathrm{a}+\mathrm{cha}}\right)-\left(9-\frac{9\mathrm{sh}9\mathrm{a}+\mathrm{sha}}{\mathrm{ch}9\mathrm{a}+\mathrm{cha}}\right)+-\cdot\cdot \quad \text{--<L3>}$$
$$(\mathrm{a}>0)$$

$$\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{th}\left(\frac{\mathrm{a}}{2}\right)}{2}$$
$$=\left(2-\frac{2\mathrm{sh}2\mathrm{a}+\mathrm{sha}}{\mathrm{ch}2\mathrm{a}+\mathrm{cha}}\right)-\left(4-\frac{4\mathrm{sh}4\mathrm{a}+\mathrm{sha}}{\mathrm{ch}4\mathrm{a}+\mathrm{cha}}\right)+\left(6-\frac{6\mathrm{sh}6\mathrm{a}+\mathrm{sha}}{\mathrm{ch}6\mathrm{a}+\mathrm{cha}}\right)-\left(8-\frac{8\mathrm{sh}8\mathrm{a}+\mathrm{sha}}{\mathrm{ch}8\mathrm{a}+\mathrm{cha}}\right)+-\cdot\cdot \quad \text{--<L4>}$$
$$(\mathrm{a}>0)$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2\mathrm{th}\left(\frac{\mathrm{a}}{2}\right)}$$
$$=\left(2-\frac{2\mathrm{sh}2\mathrm{a}-\mathrm{sha}}{\mathrm{ch}2\mathrm{a}-\mathrm{cha}}\right)-\left(4-\frac{4\mathrm{sh}4\mathrm{a}-\mathrm{sha}}{\mathrm{ch}4\mathrm{a}-\mathrm{cha}}\right)+\left(6-\frac{6\mathrm{sh}6\mathrm{a}-\mathrm{sha}}{\mathrm{ch}6\mathrm{a}-\mathrm{cha}}\right)-\left(8-\frac{8\mathrm{sh}8\mathrm{a}-\mathrm{sha}}{\mathrm{ch}8\mathrm{a}-\mathrm{cha}}\right)+-\cdot\cdot \quad \text{--<L5>}$$
$$(\mathrm{a}>0)$$

いずれも面白い形をしている。＜Ｌ４＞と＜Ｌ５＞は対をなしているように見え、きれいである。こういうのを双対というのだろうか。その視点からみれば＜Ｌ３＞にも相棒が存在するはずである。

****

2025.8.23 杉岡幹生

sugioka_m@mvb.biglobe.ne.jp

＜参考文献＞

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」（Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社）

・「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）