

＜ 双曲線ゼータとその派生式 その53 ＞

新たに恒等式を三つ見出したので紹介したい。下方青色式の＜L＞、＜L 2＞、＜L 3＞である。

なお、＜7-1＞、＜7-2＞の左辺と＜K 1＞、＜K 2＞については、本質的に同値である形に変形したので了解いただきたい。

なお、双曲線関数 $\sinh$, $\cosh$, $\tanh$ はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、 $\text{sh}2a$ は $\sinh(2a)$ のことであり、 $\text{th}a$ は $\tanh(a)$ のことである。a は任意の実数であり、よって例えば、 $(a \neq 0)$ は「a は 0 でない任意の実数」を意味する。 $\log$ は自然対数、 e は自然対数の底である。 $\tan^{-1}$ は $\arctan$ 、 th^{-1} は arctanh 。

=====

＜ 恒等式 ＞

$$\frac{1}{\text{ch}a-1} - \frac{1}{\text{sha}} = 2 \left(\frac{1}{\text{ch}2a-\text{cha}} + \frac{1}{\text{ch}4a-\text{cha}} + \frac{1}{\text{ch}6a-\text{cha}} + \frac{1}{\text{ch}8a-\text{cha}} + \cdots \right) \quad \text{-----} \langle 1 \rangle$$

$(a > 0)$

$$\frac{1}{\text{sha}} - \frac{1}{\text{cha}+1} = 2 \left(\frac{1}{\text{ch}2a+\text{cha}} + \frac{1}{\text{ch}4a+\text{cha}} + \frac{1}{\text{ch}6a+\text{cha}} + \frac{1}{\text{ch}8a+\text{cha}} + \cdots \right) \quad \text{-----} \langle 2 \rangle$$

$(a > 0)$

$$\frac{1}{\text{sh}^2(a/2)} = 4 \left(\frac{\text{cha}}{\text{ch}2a-\text{cha}} + \frac{\text{ch}2a}{\text{ch}4a-\text{cha}} + \frac{\text{ch}3a}{\text{ch}6a-\text{cha}} + \frac{\text{ch}4a}{\text{ch}8a-\text{cha}} + \cdots \right) \quad \text{-----} \langle 3 \rangle$$

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{\text{ch}^2(a/2)} = 4 \left(\frac{\text{cha}}{\text{ch}2a+\text{cha}} - \frac{\text{ch}2a}{\text{ch}4a+\text{cha}} + \frac{\text{ch}3a}{\text{ch}6a+\text{cha}} - \frac{\text{ch}4a}{\text{ch}8a+\text{cha}} + \cdots \right) \quad \text{-----} \langle 4 \rangle$$

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{\text{sha}} = 2 \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}2a-\text{cha}} - \frac{\text{sh}2a}{\text{ch}4a-\text{cha}} + \frac{\text{sh}3a}{\text{ch}6a-\text{cha}} - \frac{\text{sh}4a}{\text{ch}8a-\text{cha}} + \cdots \right) \quad \text{-----} \langle 5 \rangle$$

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{\text{sha}} = 2 \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}2a+\text{cha}} + \frac{\text{sh}2a}{\text{ch}4a+\text{cha}} + \frac{\text{sh}3a}{\text{ch}6a+\text{cha}} + \frac{\text{sh}4a}{\text{ch}8a+\text{cha}} + \cdots \right) \quad \text{-----} \langle 6 \rangle$$

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{2\text{th}\left(\frac{a}{2}\right)} - \frac{1}{2}$$

$$= \left(\frac{\text{sh}2a}{\text{ch}2a-\text{cha}} - 1\right) - \left(\frac{\text{sh}4a}{\text{ch}4a-\text{cha}} - 1\right) + \left(\frac{\text{sh}6a}{\text{ch}6a-\text{cha}} - 1\right) - \left(\frac{\text{sh}8a}{\text{ch}8a-\text{cha}} - 1\right) + - \cdot \cdot \quad \text{---<7-1>}$$

(a > 0)

$$\frac{1}{2} - \frac{\text{th}\left(\frac{a}{2}\right)}{2}$$

$$= \left(1 - \frac{\text{sh}2a}{\text{ch}2a+\text{cha}}\right) - \left(1 - \frac{\text{sh}4a}{\text{ch}4a+\text{cha}}\right) + \left(1 - \frac{\text{sh}6a}{\text{ch}6a+\text{cha}}\right) - \left(1 - \frac{\text{sh}8a}{\text{ch}8a+\text{cha}}\right) + - \cdot \cdot \quad \text{---<7-2>}$$

(a > 0)

$$\left(\frac{1}{2}\right) \tan^{-1}\left(\frac{1}{\text{sha}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\text{cha}}{\text{sh}2a}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\text{cha}}{\text{sh}4a}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\text{cha}}{\text{sh}6a}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\text{cha}}{\text{sh}8a}\right) + - \cdot \cdot \quad \text{---}$$

(a ≠ 0)

$$\left(\frac{1}{2}\right) \tan^{-1}\left(\frac{1}{\text{sha}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}2a}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}4a}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}6a}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}8a}\right) + \cdot \cdot \quad \text{---<D>}$$

(a ≠ 0)

$$\frac{1}{2\text{sha}} = \frac{\text{sh}3a-3\text{sha}}{\text{ch}4a-\text{ch}2a} + \frac{3\text{sh}5a-5\text{sh}3a}{\text{ch}8a-\text{ch}2a} + \frac{5\text{sh}7a-7\text{sh}5a}{\text{ch}12a-\text{ch}2a} + \frac{7\text{sh}9a-9\text{sh}7a}{\text{ch}16a-\text{ch}2a} + \cdot \cdot \quad \text{-----<A2>}$$

(a ≠ 0)

$$\frac{1}{2\text{cha}} = \frac{\text{ch}3a+3\text{cha}}{\text{ch}4a+\text{ch}2a} - \frac{3\text{ch}5a+5\text{ch}3a}{\text{ch}8a+\text{ch}2a} + \frac{5\text{ch}7a+7\text{ch}5a}{\text{ch}12a+\text{ch}2a} - \frac{7\text{ch}9a+9\text{ch}7a}{\text{ch}16a+\text{ch}2a} + - \cdot \cdot \quad \text{-----<B2>}$$

(a ≠ 0)

$$\frac{1}{2\text{sha}} = \frac{\text{sh}3a+3\text{sha}}{\text{ch}4a-\text{ch}2a} - \frac{3\text{sh}5a+5\text{sh}3a}{\text{ch}8a-\text{ch}2a} + \frac{5\text{sh}7a+7\text{sh}5a}{\text{ch}12a-\text{ch}2a} - \frac{7\text{sh}9a+9\text{sh}7a}{\text{ch}16a-\text{ch}2a} + - \cdot \cdot \quad \text{-----<C2>}$$

(a ≠ 0)

$$\frac{1}{2\text{cha}} = \frac{\text{ch}3a-3\text{cha}}{\text{ch}4a+\text{ch}2a} + \frac{3\text{ch}5a-5\text{ch}3a}{\text{ch}8a+\text{ch}2a} + \frac{5\text{ch}7a-7\text{ch}5a}{\text{ch}12a+\text{ch}2a} + \frac{7\text{ch}9a-9\text{ch}7a}{\text{ch}16a+\text{ch}2a} + \cdot \cdot \quad \text{-----<D2>}$$

(a ≠ 0)

$$\operatorname{th}\left(\frac{a}{2}\right)=\left(\frac{\operatorname{ch}2a-\operatorname{cha}}{\operatorname{ch}2a+\operatorname{cha}}\right)\times\left(\frac{\operatorname{ch}4a+\operatorname{cha}}{\operatorname{ch}4a-\operatorname{cha}}\right)\times\left(\frac{\operatorname{ch}6a-\operatorname{cha}}{\operatorname{ch}6a+\operatorname{cha}}\right)\times\left(\frac{\operatorname{ch}8a+\operatorname{cha}}{\operatorname{ch}8a-\operatorname{cha}}\right)\times\cdot\cdot\cdot\text{----}<\text{E1}>$$

(a > 0)

$$\operatorname{th}\left(\frac{a}{2}\right)=\left(\frac{\operatorname{sh}2a-\operatorname{sha}}{\operatorname{sh}2a+\operatorname{sha}}\right)\times\left(\frac{\operatorname{sh}4a-\operatorname{sha}}{\operatorname{sh}4a+\operatorname{sha}}\right)\times\left(\frac{\operatorname{sh}6a-\operatorname{sha}}{\operatorname{sh}6a+\operatorname{sha}}\right)\times\left(\frac{\operatorname{sh}8a-\operatorname{sha}}{\operatorname{sh}8a+\operatorname{sha}}\right)\times\cdot\cdot\cdot\text{----}<\text{E2}>$$

(a > 0)

$$\frac{1}{(\mathrm{e}^a-1)}+\frac{1}{2(\mathrm{e}^{2a}-1)}+\frac{1}{3(\mathrm{e}^{3a}-1)}+\frac{1}{4(\mathrm{e}^{4a}-1)}+\cdot\cdot\cdot$$

$$=\log\left(\frac{1}{(1-\mathrm{e}^{-a})}\times\frac{1}{(1-\mathrm{e}^{-2a})}\times\frac{1}{(1-\mathrm{e}^{-3a})}\times\frac{1}{(1-\mathrm{e}^{-4a})}\times\cdot\cdot\cdot\right)\text{----}<\text{F1}>$$

(a > 0)

$$\frac{1}{\operatorname{sh}^2(a/2)}=4\operatorname{sha}\left(\frac{\operatorname{sh}2a}{(\operatorname{ch}2a-\operatorname{cha})^2}+\frac{\operatorname{sh}4a}{(\operatorname{ch}4a-\operatorname{cha})^2}+\frac{\operatorname{sh}6a}{(\operatorname{ch}6a-\operatorname{cha})^2}+\frac{\operatorname{sh}8a}{(\operatorname{ch}8a-\operatorname{cha})^2}+\cdot\cdot\cdot\right)\text{---}<\text{G1}>$$

(a ≠ 0)

$$\frac{1}{\operatorname{ch}^2(a/2)}=4\operatorname{sha}\left(\frac{\operatorname{sh}2a}{(\operatorname{ch}2a+\operatorname{cha})^2}+\frac{\operatorname{sh}4a}{(\operatorname{ch}4a+\operatorname{cha})^2}+\frac{\operatorname{sh}6a}{(\operatorname{ch}6a+\operatorname{cha})^2}+\frac{\operatorname{sh}8a}{(\operatorname{ch}8a+\operatorname{cha})^2}+\cdot\cdot\cdot\right)\text{---}<\text{G2}>$$

(a ≠ 0)

$$2=\left(\frac{\mathrm{e}^{2a}(\operatorname{cha}+\operatorname{cha})}{\operatorname{ch}3a+\operatorname{cha}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{e}^{2a}(\operatorname{ch}5a+\operatorname{cha})}{\operatorname{ch}7a+\operatorname{cha}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{e}^{2a}(\operatorname{ch}9a+\operatorname{cha})}{\operatorname{ch}11a+\operatorname{cha}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{e}^{2a}(\operatorname{ch}13a+\operatorname{cha})}{\operatorname{ch}15a+\operatorname{cha}}\right)\times\cdot\cdot\cdot\text{---}<\text{H}>$$

(a > 0)

$$\frac{1}{\operatorname{sh}^2(a/2)}=4\left(\frac{\operatorname{ch}2a\cdot\operatorname{cha}-1}{(\operatorname{ch}2a-\operatorname{cha})^2}-\frac{\operatorname{ch}4a\cdot\operatorname{cha}-1}{(\operatorname{ch}4a-\operatorname{cha})^2}+\frac{\operatorname{ch}6a\cdot\operatorname{cha}-1}{(\operatorname{ch}6a-\operatorname{cha})^2}-\frac{\operatorname{ch}8a\cdot\operatorname{cha}-1}{(\operatorname{ch}8a-\operatorname{cha})^2}+-\cdot\cdot\cdot\right)\text{----}<\text{I1}>$$

(a ≠ 0)

$$\frac{1}{\operatorname{ch}^2(a/2)}=4\left(\frac{\operatorname{ch}2a\cdot\operatorname{cha}+1}{(\operatorname{ch}2a+\operatorname{cha})^2}-\frac{\operatorname{ch}4a\cdot\operatorname{cha}+1}{(\operatorname{ch}4a+\operatorname{cha})^2}+\frac{\operatorname{ch}6a\cdot\operatorname{cha}+1}{(\operatorname{ch}6a+\operatorname{cha})^2}-\frac{\operatorname{ch}8a\cdot\operatorname{cha}+1}{(\operatorname{ch}8a+\operatorname{cha})^2}+-\cdot\cdot\cdot\right)\text{----}<\text{I2}>$$

(a ≠ 0)

$$\text{tha} = \left(\frac{\text{ch}3a}{\text{cha}} \cdot \frac{\text{th}2a - \text{tha}}{\text{th}2a + \text{tha}} \right) \times \left(\frac{\text{ch}5a}{\text{ch}3a} \cdot \frac{\text{th}4a - \text{tha}}{\text{th}4a + \text{tha}} \right) \times \left(\frac{\text{ch}7a}{\text{ch}5a} \cdot \frac{\text{th}6a - \text{tha}}{\text{th}6a + \text{tha}} \right) \times \left(\frac{\text{ch}9a}{\text{ch}7a} \cdot \frac{\text{th}8a - \text{tha}}{\text{th}8a + \text{tha}} \right) \times \cdots \text{---<J>}$$

(a > 0)

$$-\frac{1}{2} + \frac{\text{th}\left(\frac{a}{2}\right)}{2}$$

$$= \left(1 - \frac{\text{sh}2a + 2\text{sha}}{\text{ch}2a + \text{cha}}\right) + \left(1 - \frac{\text{sh}4a + 4\text{sha}}{\text{ch}4a + \text{cha}}\right) + \left(1 - \frac{\text{sh}6a + 6\text{sha}}{\text{ch}6a + \text{cha}}\right) + \left(1 - \frac{\text{sh}8a + 8\text{sha}}{\text{ch}8a + \text{cha}}\right) + \cdots \text{---<K1>}$$

(a > 0)

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2\text{th}\left(\frac{a}{2}\right)}$$

$$= \left(1 - \frac{\text{sh}2a - 2\text{sha}}{\text{ch}2a - \text{cha}}\right) + \left(1 - \frac{\text{sh}4a - 4\text{sha}}{\text{ch}4a - \text{cha}}\right) + \left(1 - \frac{\text{sh}6a - 6\text{sha}}{\text{ch}6a - \text{cha}}\right) + \left(1 - \frac{\text{sh}8a - 8\text{sha}}{\text{ch}8a - \text{cha}}\right) + \cdots \text{---<K2>}$$

(a > 0)

$$2 = \left(\frac{e^a}{\text{cha}}\right) \times \left(\frac{e^a \text{cha}}{\text{ch}2a}\right) \times \left(\frac{e^a \text{ch}2a}{\text{ch}3a}\right) \times \left(\frac{e^a \text{ch}3a}{\text{ch}4a}\right) \times \left(\frac{e^a \text{ch}4a}{\text{ch}5a}\right) \times \left(\frac{e^a \text{ch}5a}{\text{ch}6a}\right) \times \cdots \text{---<L>}$$

(a > 0)

$$-1 + \text{tha}$$

$$= \left(1 - \frac{\text{sh}3a + 3\text{sha}}{\text{ch}3a + \text{cha}}\right) + \left(1 - \frac{\text{sh}5a + 5\text{sha}}{\text{ch}5a + \text{cha}}\right) + \left(1 - \frac{\text{sh}7a + 7\text{sha}}{\text{ch}7a + \text{cha}}\right) + \left(1 - \frac{\text{sh}9a + 9\text{sha}}{\text{ch}9a + \text{cha}}\right) + \cdots \text{---<L2>}$$

(a > 0)

$$1 - \text{tha}$$

$$= \left(3 - \frac{3\text{sh}3a + \text{sha}}{\text{ch}3a + \text{cha}}\right) - \left(5 - \frac{5\text{sh}5a + \text{sha}}{\text{ch}5a + \text{cha}}\right) + \left(7 - \frac{7\text{sh}7a + \text{sha}}{\text{ch}7a + \text{cha}}\right) - \left(9 - \frac{9\text{sh}9a + \text{sha}}{\text{ch}9a + \text{cha}}\right) + \cdots \text{---<L3>}$$

(a > 0)

=====

これら三つの青色式を見出した。いずれも任意の正実数 a で成り立つ恒等式となっている。数値検証で、いくつかの具体値を代入して成立することを Wolfram Alpha で確認している。

<L>は一見して右辺は無数に約分できるかと錯覚するが、それはできないと気づく。<L 2>は<K 1>の兄弟分に当たるものだが、その対比が面白い。

<L 3>は変わった形をしていて大変面白い。それは右辺の()項で+と-が交互に現れる交代級数となっているので注意いただきたい。

ここでは<L 3>の証明の概要を示す。

<L 3>の証明

まず次の交代級数の変形を行っていく。

$$\frac{(-a + \log(2(\text{cha} + \cos x)))}{2} - \frac{(-3a + \log(2(\text{ch}3a + \cos x)))}{2} + \frac{(-5a + \log(2(\text{ch}5a + \cos x)))}{2} - \frac{(-7a + \log(2(\text{ch}7a + \cos x)))}{2} + \dots$$

前回の[<ゼータの香りの・・・\(その381\)>](#)の深フーリエ級数の[1]を上記の各項に適用し、ひたすら級数を縦に足し算する形で変形していく(12年前の[こちらの](#)2012/8/16の[導出]と同種の方法)。

その結果、次となる。

$$\begin{aligned} & \frac{(-a + \log(2(\text{cha} + \cos x)))}{2} - \frac{(-3a + \log(2(\text{ch}3a + \cos x)))}{2} + \frac{(-5a + \log(2(\text{ch}5a + \cos x)))}{2} - \frac{(-7a + \log(2(\text{ch}7a + \cos x)))}{2} + \dots \\ &= \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{\cos x}{\text{cha}} - \frac{\cos 2x}{2\text{ch}2a} + \frac{\cos 3x}{3\text{ch}3a} - \frac{\cos 4x}{4\text{ch}4a} + \dots \right) \end{aligned}$$

上式でxをai(i:虚数単位)で置き換えると、cos(Ai)=coshAの公式を使って、例えばcos2xはcosh2aつまりch2aとなるのから、結局、次のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{(-a + \log(2(\text{cha} + \text{cha})))}{2} - \frac{(-3a + \log(2(\text{ch}3a + \text{cha})))}{2} + \frac{(-5a + \log(2(\text{ch}5a + \text{cha})))}{2} - \frac{(-7a + \log(2(\text{ch}7a + \text{cha})))}{2} + \dots \\ &= \left(\frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \right) \end{aligned}$$

右辺は(1/2)log2となり、両辺をaに関して微分して(左辺は項別微分)、最後に式を整えれば目標の<L 3>に到達する。

終わり。

<L 3>はこのようにして得られた。他の二式も似た方法で得られる。

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

●＜L 3＞証明での決定的なポイントは、まずその証明の最初に掲げた式を思いつくか否かにかかっている。
2年前にこの種の恒等式を多く出していた頃、ほとんどの形を試しつくしたように思っていたのだが、それは錯覚だった。今回は微分という一ひねりがあり、その奥に式がひそんでいたのもその存在に長く気づけなかった。＜L 3＞は、見つけにくいところに埋もれていた鉱物（公式）であるといえそうだ。数学という地中は広大なのでまだまだ基本的なものが多くかくれていて、人間が掘ったところなどわずかである。

なお、証明中の x を ai (i : 虚数単位) に置き換えるいわゆる虚数乗法は、私は日常茶飯に使っていてそこから多くの式を得ることができた。

●＜K 1＞と＜L 2＞と＜L 3＞を並べよう。

$$-\frac{1}{2} + \frac{\text{th}\left(\frac{a}{2}\right)}{2}$$

$$= \left(1 - \frac{\text{sh}2a+2\text{sha}}{\text{ch}2a+\text{cha}}\right) + \left(1 - \frac{\text{sh}4a+4\text{sha}}{\text{ch}4a+\text{cha}}\right) + \left(1 - \frac{\text{sh}6a+6\text{sha}}{\text{ch}6a+\text{cha}}\right) + \left(1 - \frac{\text{sh}8a+8\text{sha}}{\text{ch}8a+\text{cha}}\right) + \cdots \quad \text{---<K1>}$$

($a > 0$)

$$-1 + \text{tha}$$

$$= \left(1 - \frac{\text{sh}3a+3\text{sha}}{\text{ch}3a+\text{cha}}\right) + \left(1 - \frac{\text{sh}5a+5\text{sha}}{\text{ch}5a+\text{cha}}\right) + \left(1 - \frac{\text{sh}7a+7\text{sha}}{\text{ch}7a+\text{cha}}\right) + \left(1 - \frac{\text{sh}9a+9\text{sha}}{\text{ch}9a+\text{cha}}\right) + \cdots \quad \text{---<L2>}$$

($a > 0$)

$$1 - \text{tha}$$

$$= \left(3 - \frac{3\text{sh}3a+\text{sha}}{\text{ch}3a+\text{cha}}\right) - \left(5 - \frac{5\text{sh}5a+\text{sha}}{\text{ch}5a+\text{cha}}\right) + \left(7 - \frac{7\text{sh}7a+\text{sha}}{\text{ch}7a+\text{cha}}\right) - \left(9 - \frac{9\text{sh}9a+\text{sha}}{\text{ch}9a+\text{cha}}\right) + \cdots \quad \text{---<L3>}$$

($a > 0$)

いずれも面白い式である。＜K 1＞と＜L 2＞は兄弟の関係にあり、それらを眺めているとふしぎな感覚にとらわれる。その論理からいけば、＜L 3＞も兄弟をもっているということになる。

これまで何度も見てきたように、三角関数と双曲線関数の融合域では、ある式が出ると必ずその式の兄弟や親など血のつながった式たちが存在している。それはあまりに美しい世界である。

2025.8.17 杉岡幹生

<参考文献>

- ・「マグロウヒル 数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)
- ・「数学公式Ⅱ」(森口・宇田川・一松、岩波書店)