

＜ 双曲線ゼータとその派生式 その５２＞

新たな恒等式を四つ見出したので紹介したい。下方青色式の＜A 2＞、＜C 2＞と＜K 1＞、＜K 2＞である。

なお、[前回](#)出した＜B 2＞と＜D 2＞については、もう少しすっきりした形に（＜A 2＞、＜C 2＞と同じような形に）同値変形したので了解いただきたい。

なお、双曲線関数 $\sinh$, $\cosh$, $\tanh$ はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、 $\text{sh}2a$ は $\sinh(2a)$ のことである。また a は任意の実数であり、よって例えば、 $(a \neq 0)$ は「 a は 0 でない任意の実数」を意味する。 $\log$ は自然対数、 e は自然対数の底である。 $\tan^{-1}$ は $\arctan$ 、 th^{-1} は arctanh 。

=====

＜ 恒等式 ＞

$$\frac{1}{\text{cha}-1} - \frac{1}{\text{sha}} = 2 \left(\frac{1}{\text{ch}2a-\text{cha}} + \frac{1}{\text{ch}4a-\text{cha}} + \frac{1}{\text{ch}6a-\text{cha}} + \frac{1}{\text{ch}8a-\text{cha}} + \cdots \right) \quad \text{-----} \langle 1 \rangle$$

$(a > 0)$

$$\frac{1}{\text{sha}} - \frac{1}{\text{cha}+1} = 2 \left(\frac{1}{\text{ch}2a+\text{cha}} + \frac{1}{\text{ch}4a+\text{cha}} + \frac{1}{\text{ch}6a+\text{cha}} + \frac{1}{\text{ch}8a+\text{cha}} + \cdots \right) \quad \text{-----} \langle 2 \rangle$$

$(a > 0)$

$$\frac{1}{\text{sh}^2(a/2)} = 4 \left(\frac{\text{cha}}{\text{ch}2a-\text{cha}} + \frac{\text{ch}2a}{\text{ch}4a-\text{cha}} + \frac{\text{ch}3a}{\text{ch}6a-\text{cha}} + \frac{\text{ch}4a}{\text{ch}8a-\text{cha}} + \cdots \right) \quad \text{-----} \langle 3 \rangle$$

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{\text{ch}^2(a/2)} = 4 \left(\frac{\text{cha}}{\text{ch}2a+\text{cha}} - \frac{\text{ch}2a}{\text{ch}4a+\text{cha}} + \frac{\text{ch}3a}{\text{ch}6a+\text{cha}} - \frac{\text{ch}4a}{\text{ch}8a+\text{cha}} + \cdots \right) \quad \text{-----} \langle 4 \rangle$$

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{\text{sha}} = 2 \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}2a-\text{cha}} - \frac{\text{sh}2a}{\text{ch}4a-\text{cha}} + \frac{\text{sh}3a}{\text{ch}6a-\text{cha}} - \frac{\text{sh}4a}{\text{ch}8a-\text{cha}} + \cdots \right) \quad \text{-----} \langle 5 \rangle$$

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{\text{sha}} = 2 \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}2a+\text{cha}} + \frac{\text{sh}2a}{\text{ch}4a+\text{cha}} + \frac{\text{sh}3a}{\text{ch}6a+\text{cha}} + \frac{\text{sh}4a}{\text{ch}8a+\text{cha}} + \cdots \right) \quad \text{-----} \langle 6 \rangle$$

$(a \neq 0)$

$$\frac{\operatorname{ch}\left(\frac{a}{2}\right)}{2\operatorname{sh}\left(\frac{a}{2}\right)} - \frac{1}{2}$$

$$= \left(\frac{\operatorname{sh}2a}{\operatorname{ch}2a - \operatorname{cha}} - 1\right) - \left(\frac{\operatorname{sh}4a}{\operatorname{ch}4a - \operatorname{cha}} - 1\right) + \left(\frac{\operatorname{sh}6a}{\operatorname{ch}6a - \operatorname{cha}} - 1\right) - \left(\frac{\operatorname{sh}8a}{\operatorname{ch}8a - \operatorname{cha}} - 1\right) + \cdots \quad \text{---<7-1>}$$

(a > 0)

$$\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{a}{2}\right)}{2\operatorname{ch}\left(\frac{a}{2}\right)}$$

$$= \left(1 - \frac{\operatorname{sh}2a}{\operatorname{ch}2a + \operatorname{cha}}\right) - \left(1 - \frac{\operatorname{sh}4a}{\operatorname{ch}4a + \operatorname{cha}}\right) + \left(1 - \frac{\operatorname{sh}6a}{\operatorname{ch}6a + \operatorname{cha}}\right) - \left(1 - \frac{\operatorname{sh}8a}{\operatorname{ch}8a + \operatorname{cha}}\right) + \cdots \quad \text{---<7-2>}$$

(a > 0)

$$\left(\frac{1}{2}\right) \tan^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{sha}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{cha}}{\operatorname{sh}2a}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{cha}}{\operatorname{sh}4a}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{cha}}{\operatorname{sh}6a}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{cha}}{\operatorname{sh}8a}\right) + \cdots \quad \text{---}$$

(a ≠ 0)

$$\left(\frac{1}{2}\right) \tan^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{sha}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{sha}}{\operatorname{ch}2a}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{sha}}{\operatorname{ch}4a}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{sha}}{\operatorname{ch}6a}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{sha}}{\operatorname{ch}8a}\right) + \cdots \quad \text{---<D>}$$

(a ≠ 0)

$$\frac{1}{2\operatorname{sha}} = \frac{\operatorname{sh}3a - 3\operatorname{sha}}{\operatorname{ch}4a - \operatorname{ch}2a} + \frac{3\operatorname{sh}5a - 5\operatorname{sh}3a}{\operatorname{ch}8a - \operatorname{ch}2a} + \frac{5\operatorname{sh}7a - 7\operatorname{sh}5a}{\operatorname{ch}12a - \operatorname{ch}2a} + \frac{7\operatorname{sh}9a - 9\operatorname{sh}7a}{\operatorname{ch}16a - \operatorname{ch}2a} + \cdots \quad \text{---<A2>}$$

(a ≠ 0)

$$\frac{1}{2\operatorname{cha}} = \frac{\operatorname{ch}3a + 3\operatorname{cha}}{\operatorname{ch}4a + \operatorname{ch}2a} - \frac{3\operatorname{ch}5a + 5\operatorname{ch}3a}{\operatorname{ch}8a + \operatorname{ch}2a} + \frac{5\operatorname{ch}7a + 7\operatorname{ch}5a}{\operatorname{ch}12a + \operatorname{ch}2a} - \frac{7\operatorname{ch}9a + 9\operatorname{ch}7a}{\operatorname{ch}16a + \operatorname{ch}2a} + \cdots \quad \text{---<B2>}$$

(a ≠ 0)

$$\frac{1}{2\operatorname{sha}} = \frac{\operatorname{sh}3a + 3\operatorname{sha}}{\operatorname{ch}4a - \operatorname{ch}2a} - \frac{3\operatorname{sh}5a + 5\operatorname{sh}3a}{\operatorname{ch}8a - \operatorname{ch}2a} + \frac{5\operatorname{sh}7a + 7\operatorname{sh}5a}{\operatorname{ch}12a - \operatorname{ch}2a} - \frac{7\operatorname{sh}9a + 9\operatorname{sh}7a}{\operatorname{ch}16a - \operatorname{ch}2a} + \cdots \quad \text{---<C2>}$$

(a ≠ 0)

$$\frac{1}{2\text{cha}} = \frac{\text{ch}3\text{a}-3\text{cha}}{\text{ch}4\text{a}+\text{ch}2\text{a}} + \frac{3\text{ch}5\text{a}-5\text{ch}3\text{a}}{\text{ch}8\text{a}+\text{ch}2\text{a}} + \frac{5\text{ch}7\text{a}-7\text{ch}5\text{a}}{\text{ch}12\text{a}+\text{ch}2\text{a}} + \frac{7\text{ch}9\text{a}-9\text{ch}7\text{a}}{\text{ch}16\text{a}+\text{ch}2\text{a}} + \cdot \cdot \quad \text{-----}<\text{D}2>$$

(a ≠ 0)

$$\text{th}\left(\frac{\text{a}}{2}\right) = \left(\frac{\text{ch}2\text{a}-\text{cha}}{\text{ch}2\text{a}+\text{cha}}\right) \times \left(\frac{\text{ch}4\text{a}+\text{cha}}{\text{ch}4\text{a}-\text{cha}}\right) \times \left(\frac{\text{ch}6\text{a}-\text{cha}}{\text{ch}6\text{a}+\text{cha}}\right) \times \left(\frac{\text{ch}8\text{a}+\text{cha}}{\text{ch}8\text{a}-\text{cha}}\right) \times \cdot \cdot \quad \text{-----}<\text{E}1>$$

(a > 0)

$$\text{th}\left(\frac{\text{a}}{2}\right) = \left(\frac{\text{sh}2\text{a}-\text{sha}}{\text{sh}2\text{a}+\text{sha}}\right) \times \left(\frac{\text{sh}4\text{a}-\text{sha}}{\text{sh}4\text{a}+\text{sha}}\right) \times \left(\frac{\text{sh}6\text{a}-\text{sha}}{\text{sh}6\text{a}+\text{sha}}\right) \times \left(\frac{\text{sh}8\text{a}-\text{sha}}{\text{sh}8\text{a}+\text{sha}}\right) \times \cdot \cdot \quad \text{-----}<\text{E}2>$$

(a > 0)

$$\frac{1}{(\text{e}^{\text{a}}-1)} + \frac{1}{2(\text{e}^{2\text{a}}-1)} + \frac{1}{3(\text{e}^{3\text{a}}-1)} + \frac{1}{4(\text{e}^{4\text{a}}-1)} + \cdot \cdot$$

$$= \log\left(\frac{1}{(1-\text{e}^{-\text{a}})} \times \frac{1}{(1-\text{e}^{-2\text{a}})} \times \frac{1}{(1-\text{e}^{-3\text{a}})} \times \frac{1}{(1-\text{e}^{-4\text{a}})} \times \cdot \cdot \cdot\right) \quad \text{-----}<\text{F}1>$$

(a > 0)

$$\frac{1}{\text{sh}^2(\text{a}/2)} = 4\text{sha}\left(\frac{\text{sh}2\text{a}}{(\text{ch}2\text{a}-\text{cha})^2} + \frac{\text{sh}4\text{a}}{(\text{ch}4\text{a}-\text{cha})^2} + \frac{\text{sh}6\text{a}}{(\text{ch}6\text{a}-\text{cha})^2} + \frac{\text{sh}8\text{a}}{(\text{ch}8\text{a}-\text{cha})^2} + \cdot \cdot \cdot\right) \quad \text{---}<\text{G}1>$$

(a ≠ 0)

$$\frac{1}{\text{ch}^2(\text{a}/2)} = 4\text{sha}\left(\frac{\text{sh}2\text{a}}{(\text{ch}2\text{a}+\text{cha})^2} + \frac{\text{sh}4\text{a}}{(\text{ch}4\text{a}+\text{cha})^2} + \frac{\text{sh}6\text{a}}{(\text{ch}6\text{a}+\text{cha})^2} + \frac{\text{sh}8\text{a}}{(\text{ch}8\text{a}+\text{cha})^2} + \cdot \cdot \cdot\right) \quad \text{---}<\text{G}2>$$

(a ≠ 0)

$$2 = \left(\frac{\text{e}^{2\text{a}}(\text{cha}+\text{cha})}{\text{ch}3\text{a}+\text{cha}}\right) \times \left(\frac{\text{e}^{2\text{a}}(\text{ch}5\text{a}+\text{cha})}{\text{ch}7\text{a}+\text{cha}}\right) \times \left(\frac{\text{e}^{2\text{a}}(\text{ch}9\text{a}+\text{cha})}{\text{ch}11\text{a}+\text{cha}}\right) \times \left(\frac{\text{e}^{2\text{a}}(\text{ch}13\text{a}+\text{cha})}{\text{ch}15\text{a}+\text{cha}}\right) \times \cdot \cdot \quad \text{---}<\text{H}>$$

(a > 0)

$$\frac{1}{\text{sh}^2(\text{a}/2)} = 4\left(\frac{\text{ch}2\text{a} \cdot \text{cha}-1}{(\text{ch}2\text{a}-\text{cha})^2} - \frac{\text{ch}4\text{a} \cdot \text{cha}-1}{(\text{ch}4\text{a}-\text{cha})^2} + \frac{\text{ch}6\text{a} \cdot \text{cha}-1}{(\text{ch}6\text{a}-\text{cha})^2} - \frac{\text{ch}8\text{a} \cdot \text{cha}-1}{(\text{ch}8\text{a}-\text{cha})^2} + \cdot \cdot \cdot\right) \quad \text{---}<\text{I}1>$$

(a ≠ 0)

$$\frac{1}{\operatorname{ch}^2(a/2)} = 4 \left(\frac{\operatorname{ch}2a \cdot \operatorname{cha} + 1}{(\operatorname{ch}2a + \operatorname{cha})^2} - \frac{\operatorname{ch}4a \cdot \operatorname{cha} + 1}{(\operatorname{ch}4a + \operatorname{cha})^2} + \frac{\operatorname{ch}6a \cdot \operatorname{cha} + 1}{(\operatorname{ch}6a + \operatorname{cha})^2} - \frac{\operatorname{ch}8a \cdot \operatorname{cha} + 1}{(\operatorname{ch}8a + \operatorname{cha})^2} + \cdots \right) \text{---<I2>}$$

(a ≠ 0)

$$\operatorname{tha} = \left(\frac{\operatorname{ch}3a}{\operatorname{cha}} \cdot \frac{\operatorname{th}2a - \operatorname{tha}}{\operatorname{th}2a + \operatorname{tha}} \right) \times \left(\frac{\operatorname{ch}5a}{\operatorname{ch}3a} \cdot \frac{\operatorname{th}4a - \operatorname{tha}}{\operatorname{th}4a + \operatorname{tha}} \right) \times \left(\frac{\operatorname{ch}7a}{\operatorname{ch}5a} \cdot \frac{\operatorname{th}6a - \operatorname{tha}}{\operatorname{th}6a + \operatorname{tha}} \right) \times \left(\frac{\operatorname{ch}9a}{\operatorname{ch}7a} \cdot \frac{\operatorname{th}8a - \operatorname{tha}}{\operatorname{th}8a + \operatorname{tha}} \right) \times \cdots \text{---<J>}$$

(a > 0)

$$-\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{tha}}{2}$$

$$= \left(1 - \frac{\operatorname{sh}4a + 2\operatorname{sh}2a}{\operatorname{ch}4a + \operatorname{ch}2a} \right) + \left(1 - \frac{\operatorname{sh}8a + 4\operatorname{sh}2a}{\operatorname{ch}8a + \operatorname{ch}2a} \right) + \left(1 - \frac{\operatorname{sh}12a + 6\operatorname{sh}2a}{\operatorname{ch}12a + \operatorname{ch}2a} \right) + \left(1 - \frac{\operatorname{sh}16a + 8\operatorname{sh}2a}{\operatorname{ch}16a + \operatorname{ch}2a} \right) + \cdots \text{---<K1>}$$

(a > 0)

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2\operatorname{tha}}$$

$$= \left(1 - \frac{\operatorname{sh}4a - 2\operatorname{sh}2a}{\operatorname{ch}4a - \operatorname{ch}2a} \right) + \left(1 - \frac{\operatorname{sh}8a - 4\operatorname{sh}2a}{\operatorname{ch}8a - \operatorname{ch}2a} \right) + \left(1 - \frac{\operatorname{sh}12a - 6\operatorname{sh}2a}{\operatorname{ch}12a - \operatorname{ch}2a} \right) + \left(1 - \frac{\operatorname{sh}16a - 8\operatorname{sh}2a}{\operatorname{ch}16a - \operatorname{ch}2a} \right) + \cdots \text{---<K2>}$$

(a > 0)

=====

これら青色式を見出した。<A 2>と<C 2>は0でない任意の実数 a で成り立つ恒等式、また<K 1>と<K 2>は0より大きい任意の実数 a で成り立つ恒等式となっている。数値検証で、いくつかの具体値を代入して成立することを Wolfram Alpha で確認している。

いずれも面白い形をしている。以下、これら青色式の導出過程の概要を述べる。

<A 2>と<C 2>は、1年以上前の[＜双曲線ゼータと・・・（その４６）＞](#)で出した<A>と<C>をそれぞれ a に関して微分した結果、得られた。すなわち前回の<B 2>と<D 2>と類似の手法をとった。ただし上方を見てもわかるように<A>と<C>は今では出していない。その理由は、あるとき[＜A>は＜E 2>と本質的に同値、また＜C>は＜E 1>と本質的に同値と気づき、<A>と<C>を削除したからである。](#)

<K 1>と<K 2>については、過去にノートに書いていた、表に出さなかった恒等式を微分して得られた。表に出さなかった恒等式とは次のものである。

$$-\frac{a}{2} + \log \left(2\operatorname{ch} \left(\frac{a}{2} \right) \right) = \left(a - 2\operatorname{th}^{-1} \left(\operatorname{tha} \cdot \operatorname{th} \left(\frac{a}{2} \right) \right) \right) + \left(a - 2\operatorname{th}^{-1} \left(\operatorname{th}2a \cdot \operatorname{th} \left(\frac{a}{2} \right) \right) \right) + \left(a - 2\operatorname{th}^{-1} \left(\operatorname{th}3a \cdot \operatorname{th} \left(\frac{a}{2} \right) \right) \right) + \left(a - 2\operatorname{th}^{-1} \left(\operatorname{th}4a \cdot \operatorname{th} \left(\frac{a}{2} \right) \right) \right) + \cdots$$

(a > 0)

$$\frac{a}{2} - \log\left(2\operatorname{sh}\left(\frac{a}{2}\right)\right) = \left(-a + 2\operatorname{th}^{-1}\left(\frac{\operatorname{th}\left(\frac{a}{2}\right)}{\operatorname{th}a}\right)\right) + \left(-a + 2\operatorname{th}^{-1}\left(\frac{\operatorname{th}\left(\frac{a}{2}\right)}{\operatorname{th}2a}\right)\right) + \left(-a + 2\operatorname{th}^{-1}\left(\frac{\operatorname{th}\left(\frac{a}{2}\right)}{\operatorname{th}3a}\right)\right) + \left(-a + 2\operatorname{th}^{-1}\left(\frac{\operatorname{th}\left(\frac{a}{2}\right)}{\operatorname{th}4a}\right)\right) + \cdots$$

(a > 0)

これらは一見してきれいでないので表には出さなかった。今回、上側式を微分して＜K 1＞が得られ、下側式を微分して＜K 2＞が得られた。表には出さなかったが、本質的な式には違いがないのでこの奥になにかが隠れているのでは？と思い、先をもう少し掘り進めたら＜K 1＞と＜K 2＞が現れた！という構図である。

表に出さなかった上記二式は、2年前の＜[双曲線ゼータと・・・（その3 1）](#)＞の[1]、[2]と、次の深フーリエ級数と名付けた次の恒等式の二つを組み合わせて導出した。

$$\frac{\sin x}{e^a} - \frac{\sin 2x}{2e^{2a}} + \frac{\sin 3x}{3e^{3a}} - \frac{\sin 4x}{4e^{4a}} + \cdots = \frac{x}{2} - \tan^{-1}\left(\operatorname{th}\left(\frac{a}{2}\right) \cdot \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) \quad \text{----[9]}$$

(x は任意の実数。 a > 0)

$$\frac{\sin x}{e^a} + \frac{\sin 2x}{2e^{2a}} + \frac{\sin 3x}{3e^{3a}} + \frac{\sin 4x}{4e^{4a}} + \cdots = -\frac{x}{2} + \tan^{-1}\left(\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{th}\left(\frac{a}{2}\right)}\right) \quad \text{----[10]}$$

(x は任意の実数。 a > 0)

この[9]、[10]は＜[双曲線ゼータと・・・（その3 1）](#)＞の深フーリエ級数に追加できていなかったものであり、今回はじめて表に出した。

整理整頓の意味で、[9]、[10]も加えた形で＜[双曲線ゼータと・・・（その3 1）](#)＞のフーリエ級数、深フーリエ級数を並べておく。これらはフーリエ級数、深フーリエ級数と名付けているが、フーリエ級数とはなんの関係もなく単なる(二変数)恒等式であり（あるとき気づいた）、よって制限を加えていた定義域も以下にて修正した。なお、フーリエ級数、深フーリエ級数という名称はそのままとする。

＜ フーリエ級数 ＞

$$\frac{\sin x}{e^a} + \frac{\sin 2x}{e^{2a}} + \frac{\sin 3x}{e^{3a}} + \frac{\sin 4x}{e^{4a}} + \cdots = \frac{\sin x}{2(\operatorname{cha} - \cos x)} \quad \text{-----①}$$

(x は任意の実数。 a > 0)

$$\frac{\cos x}{e^a} + \frac{\cos 2x}{e^{2a}} + \frac{\cos 3x}{e^{3a}} + \frac{\cos 4x}{e^{4a}} + \cdots = -\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sha}}{2(\operatorname{cha} - \cos x)} \quad \text{-----②}$$

(x は任意の実数。 a > 0)

$$\frac{\sin x}{e^a} - \frac{\sin 2x}{e^{2a}} + \frac{\sin 3x}{e^{3a}} - \frac{\sin 4x}{e^{4a}} + \cdots = \frac{\sin x}{2(\operatorname{cha} + \cos x)} \quad \text{-----③}$$

(x は任意の実数。 a > 0)

$$\frac{\cos x}{e^a} - \frac{\cos 2x}{e^{2a}} + \frac{\cos 3x}{e^{3a}} - \frac{\cos 4x}{e^{4a}} + \cdots = \frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sha}}{2(\operatorname{cha} + \cos x)} \quad \text{-----④}$$

(x は任意の実数。 a > 0)

$$\frac{\sin x}{e^a} + \frac{\sin 3x}{e^{3a}} + \frac{\sin 5x}{e^{5a}} + \frac{\sin 7x}{e^{7a}} + \cdots = \frac{\sin x \cdot \text{cha}}{\text{ch}2a - \cos 2x} \quad \text{-----} \textcircled{5}$$

(x は任意の実数。 a > 0)

$$\frac{\sin x}{e^a} - \frac{\sin 3x}{e^{3a}} + \frac{\sin 5x}{e^{5a}} - \frac{\sin 7x}{e^{7a}} + \cdots = \frac{\sin x \cdot \text{sha}}{\text{ch}2a + \cos 2x} \quad \text{-----} \textcircled{6}$$

(x は任意の実数。 a > 0)

$$\frac{\cos x}{e^a} + \frac{\cos 3x}{e^{3a}} + \frac{\cos 5x}{e^{5a}} + \frac{\cos 7x}{e^{7a}} + \cdots = \frac{\cos x \cdot \text{sha}}{\text{ch}2a - \cos 2x} \quad \text{-----} \textcircled{7}$$

(x は任意の実数。 a > 0)

$$\frac{\cos x}{e^a} - \frac{\cos 3x}{e^{3a}} + \frac{\cos 5x}{e^{5a}} - \frac{\cos 7x}{e^{7a}} + \cdots = \frac{\cos x \cdot \text{cha}}{\text{ch}2a + \cos 2x} \quad \text{-----} \textcircled{8}$$

(x は任意の実数。 a > 0)

< 深フーリエ級数 >

$$\frac{\cos x}{e^a} - \frac{\cos 2x}{2e^{2a}} + \frac{\cos 3x}{3e^{3a}} - \frac{\cos 4x}{4e^{4a}} + \cdots = (1/2)\{-a + \log(2(\text{cha} + \text{cx}))\} \quad \text{----}[1]$$

(x は任意の実数。 a > 0)

$$\frac{\cos x}{e^a} + \frac{\cos 2x}{2e^{2a}} + \frac{\cos 3x}{3e^{3a}} + \frac{\cos 4x}{4e^{4a}} + \cdots = (1/2)\{a - \log(2(\text{cha} - \text{cx}))\} \quad \text{----}[2]$$

(x は任意の実数。 a > 0)

$$\frac{\cos x}{e^a} + \frac{\cos 3x}{3e^{3a}} + \frac{\cos 5x}{5e^{5a}} + \frac{\cos 7x}{7e^{7a}} + \cdots = (1/4)\log\left(\frac{\text{cha} + \cos x}{\text{cha} - \cos x}\right) \quad \text{----}[3]$$

(x は任意の実数。 a > 0)

$$\frac{\sin x}{e^a} - \frac{\sin 3x}{3e^{3a}} + \frac{\sin 5x}{5e^{5a}} - \frac{\sin 7x}{7e^{7a}} + \cdots = (1/4)\log\left(\frac{\text{cha} + \sin x}{\text{cha} - \sin x}\right) \quad \text{----}[4]$$

(x は任意の実数。 a > 0)

$$\frac{\sin x}{e^a} + \frac{\sin 3x}{3e^{3a}} + \frac{\sin 5x}{5e^{5a}} + \frac{\sin 7x}{7e^{7a}} + \cdots = (1/2)\tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{\text{sha}}\right) \quad \text{----}[5]$$

(x は任意の実数。 a > 0)

$$\frac{\cos x}{e^a} - \frac{\cos 3x}{3e^{3a}} + \frac{\cos 5x}{5e^{5a}} - \frac{\cos 7x}{7e^{7a}} + \cdots = (1/2)\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{\text{sha}}\right) \quad \text{----}[6]$$

(x は任意の実数。 a > 0)

$$\frac{\cos x}{e^a} + \frac{\cos 3x}{3e^{3a}} + \frac{\cos 5x}{5e^{5a}} + \frac{\cos 7x}{7e^{7a}} + \cdots = (1/2) \operatorname{th}^{-1} \left(\frac{\cos x}{\operatorname{cha}} \right) \quad \text{----[7]}$$

(x は任意の実数。 a > 0)

$$\frac{\sin x}{e^a} - \frac{\sin 3x}{3e^{3a}} + \frac{\sin 5x}{5e^{5a}} - \frac{\sin 7x}{7e^{7a}} + \cdots = (1/2) \operatorname{th}^{-1} \left(\frac{\sin x}{\operatorname{cha}} \right) \quad \text{----[8]}$$

(x は任意の実数。 a > 0)

$$\frac{\sin x}{e^a} - \frac{\sin 2x}{2e^{2a}} + \frac{\sin 3x}{3e^{3a}} - \frac{\sin 4x}{4e^{4a}} + \cdots = \frac{x}{2} - \tan^{-1} \left(\operatorname{th} \left(\frac{a}{2} \right) \cdot \tan \left(\frac{x}{2} \right) \right) \quad \text{----[9]}$$

(x は任意の実数。 a > 0)

$$\frac{\sin x}{e^a} + \frac{\sin 2x}{2e^{2a}} + \frac{\sin 3x}{3e^{3a}} + \frac{\sin 4x}{4e^{4a}} + \cdots = -\frac{x}{2} + \tan^{-1} \left(\frac{\tan \left(\frac{x}{2} \right)}{\operatorname{th} \left(\frac{a}{2} \right)} \right) \quad \text{----[10]}$$

(x は任意の実数。 a > 0)

注記： [3]と[7]、[4]と[8]はじつは同値であるが、そのままの形で使いたい場合があり便利なので、このまま残しておく。

=====

以上が、今回の青色式の導出過程の概略となる。

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

●<A 2>と<C 2>と、前回分の<B 2>と<D 2>と一緒に並べよう。

$$\frac{1}{2\operatorname{sha}} = \frac{\operatorname{sh}3a - 3\operatorname{sha}}{\operatorname{ch}4a - \operatorname{ch}2a} + \frac{3\operatorname{sh}5a - 5\operatorname{sh}3a}{\operatorname{ch}8a - \operatorname{ch}2a} + \frac{5\operatorname{sh}7a - 7\operatorname{sh}5a}{\operatorname{ch}12a - \operatorname{ch}2a} + \frac{7\operatorname{sh}9a - 9\operatorname{sh}7a}{\operatorname{ch}16a - \operatorname{ch}2a} + \cdots \quad \text{----<A2>}$$

(a ≠ 0)

$$\frac{1}{2\operatorname{cha}} = \frac{\operatorname{ch}3a + 3\operatorname{cha}}{\operatorname{ch}4a + \operatorname{ch}2a} - \frac{3\operatorname{ch}5a + 5\operatorname{ch}3a}{\operatorname{ch}8a + \operatorname{ch}2a} + \frac{5\operatorname{ch}7a + 7\operatorname{ch}5a}{\operatorname{ch}12a + \operatorname{ch}2a} - \frac{7\operatorname{ch}9a + 9\operatorname{ch}7a}{\operatorname{ch}16a + \operatorname{ch}2a} + \cdots \quad \text{----<B2>}$$

(a ≠ 0)

$$\frac{1}{2\operatorname{sha}} = \frac{\operatorname{sh}3a + 3\operatorname{sha}}{\operatorname{ch}4a - \operatorname{ch}2a} - \frac{3\operatorname{sh}5a + 5\operatorname{sh}3a}{\operatorname{ch}8a - \operatorname{ch}2a} + \frac{5\operatorname{sh}7a + 7\operatorname{sh}5a}{\operatorname{ch}12a - \operatorname{ch}2a} - \frac{7\operatorname{sh}9a + 9\operatorname{sh}7a}{\operatorname{ch}16a - \operatorname{ch}2a} + \cdots \quad \text{----<C2>}$$

(a ≠ 0)

$$\frac{1}{2\operatorname{cha}} = \frac{\operatorname{ch}3a - 3\operatorname{cha}}{\operatorname{ch}4a + \operatorname{ch}2a} + \frac{3\operatorname{ch}5a - 5\operatorname{ch}3a}{\operatorname{ch}8a + \operatorname{ch}2a} + \frac{5\operatorname{ch}7a - 7\operatorname{ch}5a}{\operatorname{ch}12a + \operatorname{ch}2a} + \frac{7\operatorname{ch}9a - 9\operatorname{ch}7a}{\operatorname{ch}16a + \operatorname{ch}2a} + \cdots \quad \text{----<D2>}$$

(a ≠ 0)

これらはセットで見ると本当に美しい。セットで完成する襖(ふすま)絵をみているようである。

●＜K 1＞と＜K 2＞を眺めよう。

$$-\frac{1}{2} + \frac{\text{tha}}{2}$$

$$= \left(1 - \frac{\text{sh}4a + 2\text{sh}2a}{\text{ch}4a + \text{ch}2a}\right) + \left(1 - \frac{\text{sh}8a + 4\text{sh}2a}{\text{ch}8a + \text{ch}2a}\right) + \left(1 - \frac{\text{sh}12a + 6\text{sh}2a}{\text{ch}12a + \text{ch}2a}\right) + \left(1 - \frac{\text{sh}16a + 8\text{sh}2a}{\text{ch}16a + \text{ch}2a}\right) + \cdots \quad \text{--<K1>}$$

(a > 0)

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2\text{tha}}$$

$$= \left(1 - \frac{\text{sh}4a - 2\text{sh}2a}{\text{ch}4a - \text{ch}2a}\right) + \left(1 - \frac{\text{sh}8a - 4\text{sh}2a}{\text{ch}8a - \text{ch}2a}\right) + \left(1 - \frac{\text{sh}12a - 6\text{sh}2a}{\text{ch}12a - \text{ch}2a}\right) + \left(1 - \frac{\text{sh}16a - 8\text{sh}2a}{\text{ch}16a - \text{ch}2a}\right) + \cdots \quad \text{--<K2>}$$

(a > 0)

こちら面白い。右辺は急速に左辺値に収束していく。a>0 の任意実数 a で成り立つというのがよい。

●上記二式を足したり、引いたりするとどうなるか。興味ある読者は試してもらいたい。とくに足す場合が面白い。＜K 2＞の相似形が出る。それは私が何度も見てきた景色であり、高い対称性をもつ三角関数と双曲線関数の融合域の性質から来るものでもある。

●上方のフーリエ級数と深フーリエ級数の恒等式は、三角関数と双曲線関数の融合域の基本道具である。私は一部のフーリエ級数を元にして、それらを1年ほどかけて作ってきた。次々に立ち現れる課題を解決するために、これらの式が必要！存在するはず！という仮説を立てつつ構成してきた。それは私にはたいへん難しい作業であり、長い時間はかかったが、結局全てを作ることができた。

そして、それらを使うことで各種の母等式を導出し、その母等式たちから様々な恒等式を得ることができた。結局、すべての根底に恒等式（フーリエ級数、深フーリエ級数）がある！といえる。

その式の形を見てもわかる通り、それらはとんでもなくシンプルで簡単な形をしている。しかし簡単であるがゆえにこの道具は使いやすく、それを使っていくつもの建物（公式）を作ることができた。

道具は簡単なものしか役に立たない。数学者・黒川信重氏がある雑誌で「鍵はたいてい簡単なのだ！」と述べているが、全くその通りである。

2025.8.9 杉岡幹生

<参考文献>

- ・「マグロウヒル 数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)
- ・「数学公式Ⅱ」(森口・宇田川・一松、岩波書店)