

< 双曲線ゼータとその派生式 その5 1 >

新たな恒等式を二つ見出したので紹介したい。下方の青色式の<B 2>と<D 2>である。

<双曲線ゼータとその派生式>のシリーズの更新は久々であり、前回の<[その5 0](#)>は1年以上も前であるが、今回と直接つながっているのは、2024 年 4 月の<[その4 7](#)>である（そこでの<F 2>は恒等式でないので略した）。

なお、双曲線関数 $\sinh$, $\cosh$, $\tanh$ はそれぞれ sh , ch , th と略記した。例えば、 $\text{sh}2a$ は $\sinh(2a)$ のことである。また a は任意の実数であり、よって例えば、 $(a \neq 0)$ は「 a は 0 でない任意の実数」を意味する。 $\log$ は自然対数、 e は自然対数の底である。 $\tan^{-1}$ は $\arctan$ 。

=====

< 恒等式 >

$$\frac{1}{\text{ch}a-1} - \frac{1}{\text{sha}} = 2 \left(\frac{1}{\text{ch}2a-\text{cha}} + \frac{1}{\text{ch}4a-\text{cha}} + \frac{1}{\text{ch}6a-\text{cha}} + \frac{1}{\text{ch}8a-\text{cha}} + \cdots \right) \quad \text{-----<1>}$$

$(a > 0)$

$$\frac{1}{\text{sha}} - \frac{1}{\text{cha}+1} = 2 \left(\frac{1}{\text{ch}2a+\text{cha}} + \frac{1}{\text{ch}4a+\text{cha}} + \frac{1}{\text{ch}6a+\text{cha}} + \frac{1}{\text{ch}8a+\text{cha}} + \cdots \right) \quad \text{-----<2>}$$

$(a > 0)$

$$\frac{1}{\text{sh}^2(a/2)} = 4 \left(\frac{\text{cha}}{\text{ch}2a-\text{cha}} + \frac{\text{ch}2a}{\text{ch}4a-\text{cha}} + \frac{\text{ch}3a}{\text{ch}6a-\text{cha}} + \frac{\text{ch}4a}{\text{ch}8a-\text{cha}} + \cdots \right) \quad \text{-----<3>}$$

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{\text{ch}^2(a/2)} = 4 \left(\frac{\text{cha}}{\text{ch}2a+\text{cha}} - \frac{\text{ch}2a}{\text{ch}4a+\text{cha}} + \frac{\text{ch}3a}{\text{ch}6a+\text{cha}} - \frac{\text{ch}4a}{\text{ch}8a+\text{cha}} + \cdots \right) \quad \text{-----<4>}$$

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{\text{sha}} = 2 \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}2a-\text{cha}} - \frac{\text{sh}2a}{\text{ch}4a-\text{cha}} + \frac{\text{sh}3a}{\text{ch}6a-\text{cha}} - \frac{\text{sh}4a}{\text{ch}8a-\text{cha}} + \cdots \right) \quad \text{-----<5>}$$

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{\text{sha}} = 2 \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}2a+\text{cha}} + \frac{\text{sh}2a}{\text{ch}4a+\text{cha}} + \frac{\text{sh}3a}{\text{ch}6a+\text{cha}} + \frac{\text{sh}4a}{\text{ch}8a+\text{cha}} + \cdots \right) \quad \text{-----<6>}$$

$(a \neq 0)$

$$\frac{\operatorname{ch}\left(\frac{a}{2}\right)}{2\operatorname{sh}\left(\frac{a}{2}\right)} - \frac{1}{2}$$

$$= \left(\frac{\operatorname{sh}2a}{\operatorname{ch}2a-\operatorname{cha}} - 1\right) - \left(\frac{\operatorname{sh}4a}{\operatorname{ch}4a-\operatorname{cha}} - 1\right) + \left(\frac{\operatorname{sh}6a}{\operatorname{ch}6a-\operatorname{cha}} - 1\right) - \left(\frac{\operatorname{sh}8a}{\operatorname{ch}8a-\operatorname{cha}} - 1\right) + \cdots \quad \text{---<7-1>}$$

(a > 0)

$$\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{a}{2}\right)}{2\operatorname{ch}\left(\frac{a}{2}\right)}$$

$$= \left(1 - \frac{\operatorname{sh}2a}{\operatorname{ch}2a+\operatorname{cha}}\right) - \left(1 - \frac{\operatorname{sh}4a}{\operatorname{ch}4a+\operatorname{cha}}\right) + \left(1 - \frac{\operatorname{sh}6a}{\operatorname{ch}6a+\operatorname{cha}}\right) - \left(1 - \frac{\operatorname{sh}8a}{\operatorname{ch}8a+\operatorname{cha}}\right) + \cdots \quad \text{---<7-2>}$$

(a > 0)

$$\left(\frac{1}{2}\right) \tan^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{sha}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{cha}}{\operatorname{sh}2a}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{cha}}{\operatorname{sh}4a}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{cha}}{\operatorname{sh}6a}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{cha}}{\operatorname{sh}8a}\right) + \cdots \quad \text{---}$$

(a ≠ 0)

$$\frac{1}{\operatorname{cha}} = \frac{\operatorname{ch}3a+3\operatorname{cha}}{\operatorname{ch}^2a+\operatorname{sh}^22a} - \frac{3\operatorname{ch}5a+5\operatorname{ch}3a}{\operatorname{ch}^2a+\operatorname{sh}^24a} + \frac{5\operatorname{ch}7a+7\operatorname{ch}5a}{\operatorname{ch}^2a+\operatorname{sh}^26a} - \frac{7\operatorname{ch}9a+9\operatorname{ch}7a}{\operatorname{ch}^2a+\operatorname{sh}^28a} + \cdots \quad \text{-----<B2>}$$

(a ≠ 0)

$$\left(\frac{1}{2}\right) \tan^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{sha}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{sha}}{\operatorname{ch}2a}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{sha}}{\operatorname{ch}4a}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{sha}}{\operatorname{ch}6a}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{sha}}{\operatorname{ch}8a}\right) + \cdots \quad \text{---<D>}$$

(a ≠ 0)

$$\frac{1}{\operatorname{cha}} = \frac{\operatorname{ch}3a-3\operatorname{cha}}{\operatorname{sh}^2a+\operatorname{ch}^22a} + \frac{3\operatorname{ch}5a-5\operatorname{ch}3a}{\operatorname{sh}^2a+\operatorname{ch}^24a} + \frac{5\operatorname{ch}7a-7\operatorname{ch}5a}{\operatorname{sh}^2a+\operatorname{ch}^26a} + \frac{7\operatorname{ch}9a-9\operatorname{ch}7a}{\operatorname{sh}^2a+\operatorname{ch}^28a} + \cdots \quad \text{-----<D2>}$$

(a ≠ 0)

$$\operatorname{th}\left(\frac{a}{2}\right) = \left(\frac{\operatorname{ch}2a-\operatorname{cha}}{\operatorname{ch}2a+\operatorname{cha}}\right) \times \left(\frac{\operatorname{ch}4a+\operatorname{cha}}{\operatorname{ch}4a-\operatorname{cha}}\right) \times \left(\frac{\operatorname{ch}6a-\operatorname{cha}}{\operatorname{ch}6a+\operatorname{cha}}\right) \times \left(\frac{\operatorname{ch}8a+\operatorname{cha}}{\operatorname{ch}8a-\operatorname{cha}}\right) \times \cdots \quad \text{-----<E1>}$$

(a > 0)

$$\operatorname{th}\left(\frac{a}{2}\right)=\left(\frac{\operatorname{sh}2a-\operatorname{sha}}{\operatorname{sh}2a+\operatorname{sha}}\right)\times\left(\frac{\operatorname{sh}4a-\operatorname{sha}}{\operatorname{sh}4a+\operatorname{sha}}\right)\times\left(\frac{\operatorname{sh}6a-\operatorname{sha}}{\operatorname{sh}6a+\operatorname{sha}}\right)\times\left(\frac{\operatorname{sh}8a-\operatorname{sha}}{\operatorname{sh}8a+\operatorname{sha}}\right)\times\cdot\cdot\cdot\text{----<E2>}$$

(a > 0)

$$\frac{1}{(e^a-1)}+\frac{1}{2(e^{2a}-1)}+\frac{1}{3(e^{3a}-1)}+\frac{1}{4(e^{4a}-1)}+\cdot\cdot\cdot$$

$$=\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})}\times\frac{1}{(1-e^{-2a})}\times\frac{1}{(1-e^{-3a})}\times\frac{1}{(1-e^{-4a})}\times\cdot\cdot\cdot\right)\text{----<F1>}$$

(a > 0)

$$\frac{1}{\operatorname{sh}^2(a/2)}=4\operatorname{sha}\left(\frac{\operatorname{sh}2a}{(\operatorname{ch}2a-\operatorname{cha})^2}+\frac{\operatorname{sh}4a}{(\operatorname{ch}4a-\operatorname{cha})^2}+\frac{\operatorname{sh}6a}{(\operatorname{ch}6a-\operatorname{cha})^2}+\frac{\operatorname{sh}8a}{(\operatorname{ch}8a-\operatorname{cha})^2}+\cdot\cdot\cdot\right)\text{---<G1>}$$

(a ≠ 0)

$$\frac{1}{\operatorname{ch}^2(a/2)}=4\operatorname{sha}\left(\frac{\operatorname{sh}2a}{(\operatorname{ch}2a+\operatorname{cha})^2}+\frac{\operatorname{sh}4a}{(\operatorname{ch}4a+\operatorname{cha})^2}+\frac{\operatorname{sh}6a}{(\operatorname{ch}6a+\operatorname{cha})^2}+\frac{\operatorname{sh}8a}{(\operatorname{ch}8a+\operatorname{cha})^2}+\cdot\cdot\cdot\right)\text{---<G2>}$$

(a ≠ 0)

$$2=\left(\frac{e^{2a}(\operatorname{cha}+\operatorname{cha})}{\operatorname{ch}3a+\operatorname{cha}}\right)\times\left(\frac{e^{2a}(\operatorname{ch}5a+\operatorname{cha})}{\operatorname{ch}7a+\operatorname{cha}}\right)\times\left(\frac{e^{2a}(\operatorname{ch}9a+\operatorname{cha})}{\operatorname{ch}11a+\operatorname{cha}}\right)\times\left(\frac{e^{2a}(\operatorname{ch}13a+\operatorname{cha})}{\operatorname{ch}15a+\operatorname{cha}}\right)\times\cdot\cdot\cdot\text{---<H>}$$

(a > 0)

$$\frac{1}{\operatorname{sh}^2(a/2)}=4\left(\frac{\operatorname{ch}2a\cdot\operatorname{cha}-1}{(\operatorname{ch}2a-\operatorname{cha})^2}-\frac{\operatorname{ch}4a\cdot\operatorname{cha}-1}{(\operatorname{ch}4a-\operatorname{cha})^2}+\frac{\operatorname{ch}6a\cdot\operatorname{cha}-1}{(\operatorname{ch}6a-\operatorname{cha})^2}-\frac{\operatorname{ch}8a\cdot\operatorname{cha}-1}{(\operatorname{ch}8a-\operatorname{cha})^2}+-\cdot\cdot\cdot\right)\text{----<I1>}$$

(a ≠ 0)

$$\frac{1}{\operatorname{ch}^2(a/2)}=4\left(\frac{\operatorname{ch}2a\cdot\operatorname{cha}+1}{(\operatorname{ch}2a+\operatorname{cha})^2}-\frac{\operatorname{ch}4a\cdot\operatorname{cha}+1}{(\operatorname{ch}4a+\operatorname{cha})^2}+\frac{\operatorname{ch}6a\cdot\operatorname{cha}+1}{(\operatorname{ch}6a+\operatorname{cha})^2}-\frac{\operatorname{ch}8a\cdot\operatorname{cha}+1}{(\operatorname{ch}8a+\operatorname{cha})^2}+-\cdot\cdot\cdot\right)\text{----<I2>}$$

(a ≠ 0)

$$\operatorname{tha}=\left(\frac{\operatorname{ch}3a}{\operatorname{cha}}\cdot\frac{\operatorname{th}2a-\operatorname{tha}}{\operatorname{th}2a+\operatorname{tha}}\right)\times\left(\frac{\operatorname{ch}5a}{\operatorname{ch}3a}\cdot\frac{\operatorname{th}4a-\operatorname{tha}}{\operatorname{th}4a+\operatorname{tha}}\right)\times\left(\frac{\operatorname{ch}7a}{\operatorname{ch}5a}\cdot\frac{\operatorname{th}6a-\operatorname{tha}}{\operatorname{th}6a+\operatorname{tha}}\right)\times\left(\frac{\operatorname{ch}9a}{\operatorname{ch}7a}\cdot\frac{\operatorname{th}8a-\operatorname{tha}}{\operatorname{th}8a+\operatorname{tha}}\right)\times\cdot\cdot\cdot\text{--<J>}$$

(a > 0)

=====

上記の青色式を見出した。それは、0 でない任意の実数 a で成り立つ恒等式となっている。数値検証で、いくつかの具体値を代入して成立することを Wolfram Alpha で確認している。

<B 2>も<D 2>もまったく面白い形をしている。

<B 2>はを両辺 a で微分して、また<D 2>も<D>を両辺 a で微分して得られる。よってかなり簡単に出る。導出は容易ではあるが、こんな簡単なことに私は長く気づかなかった。はもうその形だけでシンプルであり、それ以上なにかをしようとは思わない。<D>も同様である。

今回、過去のノートを見直していてや<D>をながめるうちに、これらを微分したらどうなるか？とふと思った。

それで a で微分したが、右辺各項の分子がどうもきれいにならないので、だめかと思ったが、さらに

$$\operatorname{ch} x \cdot \operatorname{chy} = \{\operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y)\} / 2, \quad \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y = \{\operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch}(x-y)\} / 2$$

という公式を使って計算を続けると最後に面白い形となりおどろいた。

私は過去たくさんの計算をしていて、よい形のものはすべて計算しつくしている！などと思い込んでいるのだが、そんなのは単なる思い込みであり、多くのことを見落としてきているはずである。

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

●と<B 2>、そして<D>と<D 2>を並べよう。

$$\left(\frac{1}{2}\right) \tan^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{sha}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{cha}}{\operatorname{sh}2a}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{cha}}{\operatorname{sh}4a}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{cha}}{\operatorname{sh}6a}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{cha}}{\operatorname{sh}8a}\right) + \cdots \text{---} \\ (a \neq 0)$$

$$\frac{1}{\operatorname{cha}} = \frac{\operatorname{ch}3a + 3\operatorname{cha}}{\operatorname{ch}^2a + \operatorname{sh}^22a} - \frac{3\operatorname{ch}5a + 5\operatorname{ch}3a}{\operatorname{ch}^2a + \operatorname{sh}^24a} + \frac{5\operatorname{ch}7a + 7\operatorname{ch}5a}{\operatorname{ch}^2a + \operatorname{sh}^26a} - \frac{7\operatorname{ch}9a + 9\operatorname{ch}7a}{\operatorname{ch}^2a + \operatorname{sh}^28a} + \cdots \text{----<B2>} \\ (a \neq 0)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right) \tan^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{sha}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{sha}}{\operatorname{ch}2a}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{sha}}{\operatorname{ch}4a}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{sha}}{\operatorname{ch}6a}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{sha}}{\operatorname{ch}8a}\right) + \cdots \text{---<D>} \\ (a \neq 0)$$

$$\frac{1}{\operatorname{cha}} = \frac{\operatorname{ch}3a - 3\operatorname{cha}}{\operatorname{sh}^2a + \operatorname{ch}^22a} + \frac{3\operatorname{ch}5a - 5\operatorname{ch}3a}{\operatorname{sh}^2a + \operatorname{ch}^24a} + \frac{5\operatorname{ch}7a - 7\operatorname{ch}5a}{\operatorname{sh}^2a + \operatorname{ch}^26a} + \frac{7\operatorname{ch}9a - 9\operatorname{ch}7a}{\operatorname{sh}^2a + \operatorname{ch}^28a} + \cdots \text{----<D2>} \\ (a \neq 0)$$

まったく美しい景色である。対称性の妙！ <B 2>は+と-が交互に現れる交代級数であることに注意。

$\langle B \rangle$ を a で微分したら $\langle B^2 \rangle$ が出る。 $\langle D \rangle$ を a で微分したら $\langle D^2 \rangle$ が出る。よって、それらは親と子の関係にある。

●若いころは、自分で数学の公式が発見できるとは夢にも思わなかった。基本的なところではもうなにも残っていないと思っていた。しかしそれはとんでもない誤解だった。数学は未開の土地だらけである。私は学生のころ数学の試験がよくできた記憶がない。数学は好きであったが、得意ではなかった。いま改めて思うのは、発見（創造）と試験の点数はまるで関係がないということである。

それよりも創造で大事なものは、意識の持ち方である。前回数学者グロモフの言葉を紹介した。それに関し、私は「科学では疑うことが大事」と主張した。権威者・有名人のことを疑う、教科書を疑う。疑うという態度・意識が身に付き「この世は見落としだらけ」という認識さえもてれば、発見はだれでもできると思っている。

グロモフ

自分以外の誰も信頼しない方がいい。これはそのまま誰にでも適用できるものではありませんし、そうでない逆の方法で成功した人もいます。私の友人に5年間本を読んで勉強したが大成しなかった人がいます。彼は本の内容を疑わなかった。それがこのような結果を生んだのだと思っています。

私はいつも疑ってかかるのですが。

何がメッセージになるだろうか・・・？「自分以外の人と違うことをしなさい」ですね。

以上。

2025.8.2 杉岡幹生

<参考文献>

- ・「マグロウヒル 数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)
- ・「数学公式Ⅱ」(森口・宇田川・一松、岩波書店)
- ・「数学セミナー」2003年4月号