＜［四重積−二重積］対称式周辺にて（その６）　＞

----- ［四重積自乗四和］公式 ＆ 2nd 公式（２倍角の公式）のまとめ -----

ここ何回かで見出してきた［四重積自乗四和］公式（＆ 2nd 公式）をまとめておきたい。それらは（２変数の）２倍角の公式ともいえるものだが、それらを整理して並べておく。

以降では、双曲線関数 sinh, cosh はそれぞれ sh, ch と略記した。例えば、shy は sinh(y)のことであり、ch2x は cosh(2x)のことである。また例えば、cos2x は cos(2x)の意味である。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

［四重積自乗四和］公式１

式 1−(1)

$$(\mathrm{sinx{\cdot}shx{\cdot}cosy{\cdot}chy})^2-(\mathrm{cosx{\cdot}chx{\cdot}siny{\cdot}shy})^2+(\mathrm{cosx{\cdot}shx{\cdot}siny{\cdot}chy})^2-(\mathrm{sinx{\cdot}chx{\cdot}cosy{\cdot}shy})^2$$
$$=(\mathrm{ch2x}-\mathrm{ch2y})(1-\mathrm{cos2x{\cdot}cos2y})/4$$

式 1−(2)

$$(\mathrm{shx{\cdot}sinx{\cdot}chy{\cdot}cosy})^2-(\mathrm{chx{\cdot}cosx{\cdot}shy{\cdot}siny})^2+(\mathrm{chx{\cdot}sinx{\cdot}shy{\cdot}cosy})^2-(\mathrm{shx{\cdot}cosx{\cdot}chy{\cdot}siny})^2$$
$$=(\mathrm{cos2x}-\mathrm{cos2y})(1-\mathrm{ch2x{\cdot}ch2y})/4$$

式 1−(3)

$$(\mathrm{shx{\cdot}sinx{\cdot}cosy{\cdot}chy})^2-(\mathrm{chx{\cdot}cosx{\cdot}siny{\cdot}shy})^2-(\mathrm{chx{\cdot}sinx{\cdot}siny{\cdot}chy})^2+(\mathrm{shx{\cdot}cosx{\cdot}cosy{\cdot}shy})^2$$
$$=(\mathrm{cos2x}-\mathrm{ch2y})(1-\mathrm{ch2x{\cdot}cos2y})/4$$

［四重積自乗四和］公式２

式 2−(1)

$$(\mathrm{cosx{\cdot}shx{\cdot}cosy{\cdot}shy})^2-(\mathrm{sinx{\cdot}chx{\cdot}siny{\cdot}chy})^2+(\mathrm{cosx{\cdot}chx{\cdot}cosy{\cdot}chy})^2-(\mathrm{sinx{\cdot}shx{\cdot}siny{\cdot}shy})^2$$
$$=(\mathrm{cos2x}+\mathrm{cos2y})(\mathrm{ch2x{\cdot}ch2y}+1)/4$$

式 2−(2)

$$(\mathrm{chx{\cdot}sinx{\cdot}chy{\cdot}siny})^2-(\mathrm{shx{\cdot}cosx{\cdot}shy{\cdot}cosy})^2+(\mathrm{chx{\cdot}cosx{\cdot}chy{\cdot}cosy})^2-(\mathrm{shx{\cdot}sinx{\cdot}shy{\cdot}siny})^2$$
$$=(\mathrm{ch2x}+\mathrm{ch2y})(\mathrm{cos2x{\cdot}cos2y}+1)/4$$

式 2−(3)

$$(\mathrm{chx{\cdot}sinx{\cdot}cosy{\cdot}shy})^2-(\mathrm{shx{\cdot}cosx{\cdot}siny{\cdot}chy})^2-(\mathrm{chx{\cdot}cosx{\cdot}cosy{\cdot}chy})^2+(\mathrm{shx{\cdot}sinx{\cdot}siny{\cdot}shy})^2$$
$$=-(\mathrm{ch2x}+\mathrm{cos2y})(\mathrm{cos2x{\cdot}ch2y}+1)/4$$

[四重積自乗四和]公式３

式 3-(1)

$$(\cos x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{sh}y)^2-(\sin x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{ch}y)^2+(\cos x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{ch}y)^2-(\sin x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{sh}y)^2$$
$$=(\cos 2x+\cos 2y)(\mathrm{ch}2x\cdot \mathrm{ch}2y-1)/4$$

式 3-(2)

$$(\mathrm{ch}x\cdot \cos x\cdot \mathrm{ch}y\cdot \sin y)^2-(\mathrm{sh}x\cdot \sin x\cdot \mathrm{sh}y\cdot \cos y)^2+(\mathrm{ch}x\cdot \sin x\cdot \mathrm{ch}y\cdot \cos y)^2-(\mathrm{sh}x\cdot \cos x\cdot \mathrm{sh}y\cdot \sin y)^2$$
$$=(\mathrm{ch}2x+\mathrm{ch}2y)(1-\cos 2x\cdot \cos 2y)/4$$

式 3-(3)

$$(\mathrm{ch}x\cdot \cos x\cdot \cos y\cdot \mathrm{sh}y)^2-(\mathrm{sh}x\cdot \sin x\cdot \sin y\cdot \mathrm{ch}y)^2-(\mathrm{ch}x\cdot \sin x\cdot \cos y\cdot \mathrm{ch}y)^2+(\mathrm{sh}x\cdot \cos x\cdot \sin y\cdot \mathrm{sh}y)^2$$
$$=(\mathrm{ch}2x+\cos 2y)(\cos 2x\cdot \mathrm{ch}2y-1)/4$$

[四重積自乗四和]公式４

式 4-(1)

$$(\sin x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{sh}y)^2-(\cos x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{ch}y)^2+(\sin x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{ch}y)^2-(\cos x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{sh}y)^2$$
$$=(\cos 2y-\cos 2x)(\mathrm{ch}2x\cdot \mathrm{ch}2y+1)/4$$

式 4-(2)

$$(\mathrm{sh}x\cdot \sin x\cdot \mathrm{ch}y\cdot \sin y)^2-(\mathrm{ch}x\cdot \cos x\cdot \mathrm{sh}y\cdot \cos y)^2+(\mathrm{sh}x\cdot \cos x\cdot \mathrm{ch}y\cdot \cos y)^2-(\mathrm{ch}x\cdot \sin x\cdot \mathrm{sh}y\cdot \sin y)^2$$
$$=(\mathrm{ch}2x-\mathrm{ch}2y)(\cos 2x\cdot \cos 2y+1)/4$$

式 4-(3)

$$(\mathrm{sh}x\cdot \sin x\cdot \cos y\cdot \mathrm{sh}y)^2-(\mathrm{ch}x\cdot \cos x\cdot \sin y\cdot \mathrm{ch}y)^2-(\mathrm{sh}x\cdot \cos x\cdot \cos y\cdot \mathrm{ch}y)^2+(\mathrm{ch}x\cdot \sin x\cdot \sin y\cdot \mathrm{sh}y)^2$$
$$=(\cos 2y-\mathrm{ch}2x)(\cos 2x\cdot \mathrm{ch}2y+1)/4$$

[四重積自乗四和]2nd 公式Ⅰ

式Ⅰ-1

$$(\sin x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{ch}y)^2+(\cos x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{sh}y)^2-(\cos x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{ch}y)^2-(\sin x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{sh}y)^2$$
$$=(\cos 2y-\cos 2x)(\mathrm{ch}2x-\mathrm{ch}2y)/4$$

式Ⅰ-2

$$(\sin x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \mathrm{ch}y\cdot \cos y)^2+(\cos x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \mathrm{sh}y\cdot \sin y)^2+(\cos x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \mathrm{sh}y\cdot \cos y)^2+(\sin x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \mathrm{ch}y\cdot \sin y)^2$$
$$=(\mathrm{ch}2y-\cos 2x)(\mathrm{ch}2x-\cos 2y)/4$$

[四重積自乗四和]2nd 公式Ⅱ

式Ⅱ-1

$(\cos x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{ch}y)^2+(\sin x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{sh}y)^2-(\cos x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{sh}y)^2-(\sin x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{ch}y)^2$
$=(\cos 2x+\cos 2y)(\mathrm{ch}2x+\mathrm{ch}2y)/4$

式Ⅱ-2

$(\cos x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \mathrm{ch}y\cdot \cos y)^2+(\sin x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \mathrm{sh}y\cdot \sin y)^2+(\cos x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \mathrm{ch}y\cdot \sin y)^2+(\sin x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \mathrm{sh}y\cdot \cos y)^2$
$=(\cos 2x+\mathrm{ch}2y)(\mathrm{ch}2x+\cos 2y)/4$

[四重積自乗四和]2nd 公式Ⅲ

式Ⅲ-1

$(\cos x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{ch}y)^2+(\sin x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{sh}y)^2-(\cos x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{sh}y)^2-(\sin x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{ch}y)^2$
$=(\cos 2x+\cos 2y)(\mathrm{ch}2x-\mathrm{ch}2y)/4$

式Ⅲ-2

$(\cos x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \mathrm{ch}y\cdot \cos y)^2+(\sin x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \mathrm{sh}y\cdot \sin y)^2+(\cos x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \mathrm{ch}y\cdot \sin y)^2+(\sin x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \mathrm{sh}y\cdot \cos y)^2$
$=(\cos 2x+\mathrm{ch}2y)(\mathrm{ch}2x-\cos 2y)/4$

式Ⅲ-3

$(\mathrm{ch}x\cdot \sin x\cdot \mathrm{ch}y\cdot \cos y)^2+(\mathrm{sh}x\cdot \cos x\cdot \mathrm{sh}y\cdot \sin y)^2-(\mathrm{ch}x\cdot \cos x\cdot \mathrm{ch}y\cdot \sin y)^2-(\mathrm{sh}x\cdot \sin x\cdot \mathrm{sh}y\cdot \cos y)^2$
$=(\mathrm{ch}2x+\mathrm{ch}2y)(\cos 2y-\cos 2x)/4$

ここで、x, y は任意の実数である。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

まとめると、このようになる。これらを、３年前にゼータの香り・・（その２５１）他で発見した恒等式、[四重積−二重積]対称式を使って導出してきた。まさに（２変数の）２倍角の公式となっていることがわかるであろう。

これらは対称性があってきれいであり、くるくると円環をなしているような感じがある。

このような円環性、対称性は、三角関数と双曲線関数の融合域における特徴である。一つ式が出たら、類似の式がずるずるとたくさん出てくるというものであり、この現象はこれまで何度も経験し、そして報告してきたことである。

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

＝＝＝

●数学をやっていると、たくさんの式が得られ状況が複雑化してくる。複雑な状況というのはよくない状況だから、そこから思考を推し進めるには、その状態をすっきりさせる必要がある。そんなとき、私はいつも整理整頓したい！という気持ちがわく。

ノートに散在的にあちこちに散らばった式を、整理する作業がどうしても必要になる。そこで散らばった式を集めてきて、一か所に見やすくまとめる（書き写す）ことをよく行う。そうすると、状況が単純化され、全体像が一目瞭然となる。そんな単調な作業を繰り返し行っている。

その作業は、もうすでに得られた式をただ書き写すだけの退屈な作業であり、しんどい。しんどいがそれをやらないことには思考がすすまないから、やらざるをえない。そして、きれいに整理された式を眺めていると、次のアイディアがわいてくる。

ただ書き写すという作業は本当にたいくつである。このご時世、こんな手作業をやっているのは私くらいか？などと自問しながら、そして「学校秀才はぜったいにこんなことしないだろうなあ」などとぶつぶつつぶやきながらやっている。

●発見や発明の要諦に、整理整頓ということがあるような気がしてならない。

ある製品をつくる工場は、常に整理整頓されている必要がある。工具が乱雑にちらばっているような状況では、絶対によい製品は作れない。よいものを作る（創る）にはスムーズにことを運ぶ必要がある。工具がどこにあるのか探しているようでは、思考が乱れ、だめである。

●さて、話はまた前回の広中平祐氏の本のことに飛ぶ。

「学問の発見」（広中平祐著、佼成出版社）

前回は広中氏が、世紀の難問、特異点解消問題を解いたときのことを書いた。今回は、２０世紀数学に影響を与えた、天才にして奇人のグロタンディエクのことを広中氏が書いているので引用したい。

p.148～p.154　　　“・・”は少し略した部分、“・・・・”は大きく略した部分

****

・・

世の中で成功した人は、大抵、逆境を自分の人生にプラスに取り込んでいく能力をそなえているように私には見える。創造にも、この逆境が深く関係している、といわなければならない。私はその好例をパリで出会った一人の学者の中に見る。

ハーバード大学に留学してから二年目の一九五八年（昭和三十三年）、フランスから一人の数学者が招かれて、ハーバード大学で講義することになった。招待されたのはグロタンディエク（Grothendieck）という数学者で、当時、私が専門にしていた代数幾何学では、かなり名の知れた人物だった。

・・

彼は大学の教授ではなかった。・・パリに設立した、高等科学研究所（IHES）という私立研究所の所員だった。ハーバード大学に招待されるほどの有能な彼が、なぜ一度も大学の教授になったことがないかというと、それは彼の生い立ちによる。

彼はザリスキー教授と同じユダヤ系の人で、一九二八年に革命家の父親と、ジャーナリストであった母親との間に生まれたが、戦争中はドイツの収容所に入れられ、一六歳で母親と一緒にフランスに出てきた人であ

る。そういう時代背景と家庭環境であったため、満足な初等教育を受けることができなかったが、モンペリエ大学に入ると、数学的な才能を発揮し、後年フィールズ賞を受賞したのである。

グロタンディエクが、ナチ・ドイツ軍の嵐の中をどのようにかいくぐってフランスに渡ったのか。モンペリエ大学でどんな教授に師事して、数学の才能を発揮したのか。・・そういったことは、ほとんど私にはわからないが、彼がユダヤ系の生まれであって、無国籍つまり国籍をもたなかったことははっきりしている。

・・・・その彼の講義を一年間に渡って聴いた。

その頃のグロタンディエクは、解析から代数幾何に転向した後で、代数幾何学の基礎をスキーム（概形）理論として、全面的に書き直す仕事を始めていた。

こうして講義に耳を傾け、また学問の上で親交を結ぶうちに、ある日彼は、この講義が終わったら、自分と一緒にパリの研究所に来ないか、と私に誘いをかけてきた。

・・・・

この研究所の外部からの第一番目の所員になった私は、それから半年の間、ここに勤めながら、同時にグロタンディエクに師事した。わずか半年であったが、この間に私は貴重なことを多く学びとった。

グロタンディエクは、まるで川のない所に洪水を起こすような、バキュームクリーナーに大きな機関車をつけて数学の世界を走り回るような人物だった。ふつう数学者といえば、自分に適した問題を十分に時間をかけて選ぶというところがあるが、彼の場合は手当たり次第に全部やっているのではないかと思えるほどの怪人物で、体力もあるから一日百枚、二百枚と論文を書く。その中から次のアイディアが生まれてくるという型破りの猛烈型の学者であった。

彼は一九六六年に、モスクワで開かれた国際数学学会でフィールズ賞を受賞したが、代数幾何学では一つの大きなエポックを築いた。

・・・・

グロタンディエクの数学に賭ける執念、バイタリティーはすさまじいものだった。

この執念、馬力は、どこから生まれてくるのか。

私はそんな疑問を胸に彼の研究姿勢を見つめながら、おそらくそれは、彼が想像を絶するような逆境を生き抜いてきたからだろうと考えた。

・・・・

私はまた、こうも思ってみるのである。

人から見ると血と汗のしたたるような苦労をしても、一度として彼は、苦労を苦労として感じたことはなかったのでないか。

例えば私が、大学時代、金がなくて高価な本が買えず、夏休みになると教授の本を借りて帰郷し、大学ノートにまる写ししていた話を人にする。・・大学、大学院の七年間、三畳一間の小さな部屋に下宿し、机代わりにミカン箱を使い、その下に本を置いていたこと・・

すると、大抵の人は、「ご苦労なさったのですね」と私の顔を見つめるのだ。ところが、当の私は、苦労話をするつもりで人に話したのではないし、・・その時は別に苦労しているとも感じていなかったのである。

人は、何かに夢中になっている時は、たとえ苦労であっても、苦労を苦労と思わないのだ。・・彼もまた、苦労を実感したことがないのかもしれない。私は自分の体験から、そう推察してみるのである。

いずれにせよ、逆境につぐ逆境が、彼の数学に対するやむにやまれぬ情念となって形づくられ、それがエネルギッシュな創造活動を支えていったのではないか、と私は想像するのである。

芸術家として創造活動を続けていくには、ハングリーでなければならないといった人がいた。私はグロタンディエクのような数学者を見ると、その言葉は学問の世界における創造にもあてはまるのではないかと思う。学者もまた、何かに飢えていなければ、創造し続けることはできないのではないか。

　数学という学問は、感情や情念とはおよそ無関係な学問に受けとられがちだが、こう考えてみると、数学の創造活動も、あながち情念と無関係とはいえないようである。おそらく、人間の情念とは縁遠いように見える自然科学のすべてが、新しい理論や法則や定理を創造する上で、この情念の力を大いに借りているに違いない。
****

　この部分も、広中氏が特異点解消を成し遂げた前回の場面とともに強く印象に残っている。昔ここを読んで、こんな凄い数学者がいるんだ！と思ったのを記憶している。そして最後に強調されている“情念”ということに関連して、特異点解消の話題へと本では移っていくのである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2025.7.5 杉岡幹生

＜参考文献＞

・「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」（Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社）

・「学問の発見」（広中平祐著、佼成出版社）