

< [四重積-二重積]対称式周辺にて（その5） >

----- [四重積自乗四和]2nd 公式（2倍角の公式）の発見 -----

さらに別種の2倍角の公式を三つ見出したので、下方に青色式で示す。すなわち、前回の[四重積自乗四和]2nd 公式Ⅰと[四重積自乗四和]2nd 公式Ⅱに続く、[四重積自乗四和]2nd 公式Ⅲを今回三つ見出した（Ⅲ-1～Ⅲ-3）ということである。

その[四重積自乗四和]2nd 公式Ⅲは、[四重積-二重積]対称式Ⅲから得られるので、それらと一緒に（セットで）示した。

以降では、双曲線関数 sinh, cosh はそれぞれ sh, ch と略記した。例えば、shy は sinh(y) のことであり、ch2x は cosh(2x) のことである。また例えば、cos2x は cos(2x) の意味である。

=====

[四重積-二重積]対称式Ⅲ

対称式Ⅲ(1)

$$\cos x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \cos y \cdot \operatorname{sh} y + \sin x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \sin y \cdot \operatorname{ch} y = \{\cos(x-y) \cdot \operatorname{sh}(x+y) - \operatorname{sh}(x-y) \cdot \cos(x+y)\} / 2$$

対称式Ⅲ(2)

$$\cos x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \cos y \cdot \operatorname{ch} y + \sin x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \sin y \cdot \operatorname{sh} y = \{\cos(x-y) \cdot \operatorname{sh}(x+y) + \operatorname{sh}(x-y) \cdot \cos(x+y)\} / 2$$

対称式Ⅲ(3)

$$\cos x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \cos y \cdot \operatorname{ch} y - \sin x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \sin y \cdot \operatorname{sh} y = \{\cos(x+y) \cdot \operatorname{sh}(x+y) + \operatorname{sh}(x-y) \cdot \cos(x-y)\} / 2$$

対称式Ⅲ(4)

$$\cos x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \cos y \cdot \operatorname{sh} y - \sin x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \sin y \cdot \operatorname{ch} y = \{\cos(x+y) \cdot \operatorname{sh}(x+y) - \operatorname{sh}(x-y) \cdot \cos(x-y)\} / 2$$

=====

=====

[四重積自乗四和]2nd 公式Ⅲ

式Ⅲ-1

$$\begin{aligned} & (\cos x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \cos y \cdot \operatorname{ch} y)^2 + (\sin x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \sin y \cdot \operatorname{sh} y)^2 - (\cos x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \cos y \cdot \operatorname{sh} y)^2 - (\sin x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \sin y \cdot \operatorname{ch} y)^2 \\ & = (\cos 2x + \cos 2y) (\operatorname{ch} 2x - \operatorname{ch} 2y) / 4 \end{aligned}$$

式Ⅲ-2

$$\begin{aligned} & (\cos x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \cdot \cos y)^2 + (\sin x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y \cdot \sin y)^2 + (\cos x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \cdot \sin y)^2 + (\sin x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y \cdot \cos y)^2 \\ & = (\cos 2x + \operatorname{ch} 2y) (\operatorname{ch} 2x - \cos 2y) / 4 \end{aligned}$$

式Ⅲ-3

$$\begin{aligned} & (\operatorname{ch} x \cdot \sin x \cdot \operatorname{ch} y \cdot \cos y)^2 + (\operatorname{sh} x \cdot \cos x \cdot \operatorname{sh} y \cdot \sin y)^2 - (\operatorname{ch} x \cdot \cos x \cdot \operatorname{ch} y \cdot \sin y)^2 - (\operatorname{sh} x \cdot \sin x \cdot \operatorname{sh} y \cdot \cos y)^2 \\ & = (\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{ch}^2 y) (\cos^2 y - \cos^2 x) / 4 \end{aligned}$$

ここで、 x, y は任意の実数である。

=====

これら青色式三つが得られた。Wolfram Alpha を使った数値検証でも合っていることを確認している。

この三式は、[前回](#)の方法と類似の手順で出るので、その導出方法は略す。なお、その類似の手順を用いなくとも、左辺をひたすら直接的に変形していき右辺を出すこともできる。

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

=====

●ここで、[前回](#)の公式Ⅰと公式Ⅱも一緒に今回の公式Ⅲを並べよう。

[四重積自乗四和]2nd 公式Ⅰ

式Ⅰ-1

$$\begin{aligned} & (\sin x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \cos y \cdot \operatorname{ch} y)^2 + (\cos x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \sin y \cdot \operatorname{sh} y)^2 - (\cos x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \sin y \cdot \operatorname{ch} y)^2 - (\sin x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \cos y \cdot \operatorname{sh} y)^2 \\ & = (\cos^2 y - \cos^2 x) (\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{ch}^2 y) / 4 \end{aligned}$$

式Ⅰ-2

$$\begin{aligned} & (\sin x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \cdot \cos y)^2 + (\cos x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y \cdot \sin y)^2 + (\cos x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y \cdot \cos y)^2 + (\sin x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \cdot \sin y)^2 \\ & = (\operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x) (\operatorname{ch}^2 x - \cos^2 y) / 4 \end{aligned}$$

[四重積自乗四和]2nd 公式Ⅱ

式Ⅱ-1

$$\begin{aligned} & (\cos x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \cos y \cdot \operatorname{ch} y)^2 + (\sin x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \sin y \cdot \operatorname{sh} y)^2 - (\cos x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \cos y \cdot \operatorname{sh} y)^2 - (\sin x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \sin y \cdot \operatorname{ch} y)^2 \\ & = (\cos^2 x + \cos^2 y) (\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{ch}^2 y) / 4 \end{aligned}$$

式Ⅱ-2

$$\begin{aligned} & (\cos x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \cdot \cos y)^2 + (\sin x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y \cdot \sin y)^2 + (\cos x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \cdot \sin y)^2 + (\sin x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y \cdot \cos y)^2 \\ & = (\cos^2 x + \operatorname{ch}^2 y) (\operatorname{ch}^2 x + \cos^2 y) / 4 \end{aligned}$$

[四重積自乗四和]2nd 公式Ⅲ

式Ⅲ-1

$$\begin{aligned} & (\cos x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \cos y \cdot \operatorname{ch} y)^2 + (\sin x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \sin y \cdot \operatorname{sh} y)^2 - (\cos x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \cos y \cdot \operatorname{sh} y)^2 - (\sin x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \sin y \cdot \operatorname{ch} y)^2 \\ & = (\cos^2 x + \cos^2 y) (\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{ch}^2 y) / 4 \end{aligned}$$

式Ⅲ-2

$$\begin{aligned} & (\cos x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \cdot \cos y)^2 + (\sin x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y \cdot \sin y)^2 + (\cos x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \cdot \sin y)^2 + (\sin x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y \cdot \cos y)^2 \\ &= (\cos^2 x + \operatorname{ch}^2 y) (\operatorname{ch}^2 x - \cos^2 y) / 4 \end{aligned}$$

式Ⅲ-3

$$\begin{aligned} & (\operatorname{ch} x \cdot \sin x \cdot \operatorname{ch} y \cdot \cos y)^2 + (\operatorname{sh} x \cdot \cos x \cdot \operatorname{sh} y \cdot \sin y)^2 - (\operatorname{ch} x \cdot \cos x \cdot \operatorname{ch} y \cdot \sin y)^2 - (\operatorname{sh} x \cdot \sin x \cdot \operatorname{sh} y \cdot \cos y)^2 \\ &= (\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{ch}^2 y) (\cos^2 y - \cos^2 x) / 4 \end{aligned}$$

ここで、 x, y は任意の実数である。

なんともよい眺めである。すばらしい対称性が出ている。そして、これらはすべて（2変数の）2倍角の公式となっている。公式Ⅰと公式Ⅱは二つずつであるのに公式Ⅲだけ三つある理由は、右辺をしばらく見つめていると読者は気づかれると思う。

●さて、話はまったく関係のないことに及ぶが、昔、読んだ本で忘れられない本がある。

「学問の発見」（広中平祐著、佼成出版社）

それは広中氏が世紀の難問、特異点解消の問題を解くまでの生々しい体験を描いたものだが、若いころにこの書を読み、身体がふるえたのを覚えている。

少し長くなるが、氏が問題を解いた前後の部分を抜き出してみたい。

p. 156～p. 173 “・・・”は少し略した部分、“・・・・”は大きく略した部分

・・・とにかくニーズは理性による判断から生まれた「必要」、ウォントは現在の自分の中にある何かとてもいたたまれないような、場合によってはたまらなく爆発したくなるような情念から生まれた「必要」という具合に解釈してもいいだろう。私は、創造にはもちろんニーズもなければならないが、どこかの時点でウォントが生まれないとダメだと思うのである。つまり、創造活動を支える背景には、・・・渴望の念がなければならないのである。

・・・

若い読者諸君には、特にこのことを強調しておきたい。自分の将来を決めていくという時に、いろいろな情報がある。・・・こういう職種が有望だからこの企業に就職しようという具合に、いろいろな情報からニーズを割り出して進路を決める人が非常に多い。

しかし、そういう決め方をした人は何らかの方法でニーズから割り出したものが、ウォントに切り替わらない限り、どこかで挫折するのではないかと思う。

・・・・

ものを創る過程には、総じて、飛躍というものが必要である。・・・飛躍の原動力はニーズではなく、ウォントだと私は考えるのだ。

この本の冒頭の部分で紹介した「特異点解消」という、現代の代数幾何学の大命題を解いた道程をふり返ってみる時、私は一層その感を強くするばかりである。・ ・ ・ ・

「特異点解消」に向かって

・ ・ 読者はすでに、ジェット・コースターの軌道とその影との例えからこの問題の概要を把握されたと思うが、別の例でこれを説明すると、こういうことになる。

途中で琵琶湖を一周する東京～大阪間の一本の高速道路をつくるとする。ところがそれは、どこかで交差点ができるから、平面のままでは交差点のない一本道にはならない。この交差点がつまりは特異点であるが、さて、これを解消するにはどうしたらいいか。一周して交わる道路を立体交差にしてやればいいわけである。

・ ・

ところが、高さをつけて交差点をなくした上下二本の道路に落ちた影を見ると、なおかつそこには交わる点、特異点が存在するのである。・ ・ それをくり返して影に生じる特異点を解消することが必要になってくるわけである。

・ ・ そのあらゆる次元に生じる特異点を解消し、特異点のない姿にまで帰してやれる論理を証明することが、この問題解消の目標である。

・ ・ ・ ・

私が初めてこの問題を知ったのは、前にも述べたように、大学三年の時であった。

・ ・ ・ ・

京大では最も革新的なそのセミナーに、いわば秋月先生の孫弟子のような形で入ったわけだが、まだ基礎ができていない三年の頃には、・ ・ 私はほとんどわからなかった。

・ ・ ・ ・ セミナーで紹介されたのが、特異点解消という問題だった。このセミナーで西三重雄さんが解説したのが、後に私が師事することになったザリスキー教授の三次元の特異点解消についての論文である。

ザリスキー教授は、・ ・ 一次元の特異点解消を、彼一流のやり方で解き、さらに二次元の特異点解消について三つ論文を書き、そうして三次元の特異点もどうにか解消したのである。

しかし、ザリスキー教授の三次元特異点解消の仕方は、無理な力でねじ伏せたような、ぎこちないやり方で、その理論は難解なことこの上もなかった。だから、四次元ないしそれ以上のものでは処置なしだろうと、みんなが思っていたわけだ。

・ ・ ・ ・

処女論文では悪評を浴びたが、・ ・ ハーバード大学に留学することになった私は、以後、師のザリスキー教授のもとで「有理変換」とか「特異点」の勉強に明け暮れた。

・ ・ ・ ・

アビヤンカーと意見を交換しようと思ったのも、何か発想を示唆してくれることはないかという期待が胸にあったからだ。

私はアビヤンカーに、当時私が特異点解消について考えていたことを忌憚なく語った。・ ・ ・ ・ 何よりも自信家の彼は、「ミスター・ヒロナカのやり方では、絶対に解けない！」といい切った。結局、もの別れに終わったわけだが、それも私には、いい刺激剤となった。

スリープ・ウィズ・プロブレム

私はそれから数か月にわたって取り組んでみたが、解決のめどは杳(よう)として立たなかった。その頃、こんな言葉を耳にした。ハーバード大学のボット教授がいった言葉だが、

「スリープ・ウィズ・プロブレム (Sleep with problem)」

という言葉である。

・ ・

私はその間、文字通り特異点解消という問題と“寝た”のであるが、とはいうものの一層、その難解なことを自覚したにすぎなかった。まさに、やればやるほど底知れぬ迷界に引きずり込まれていくような感じだった。

私はひとまず、問題から目を離してソッポを向くほかなかった。

夢を捨てたわけではない。・ ・夢を実現したいという欲望（ウォント）は、ますます膨らんでいた。

・ ・ ・ ・

しかし、ブランダイス大学に勤めてから二年目、助教授になった頃から、少しずつだが独自のアイデアが生まれてきたのである。・ ・問題と一緒に寝起きした結果、その解明のヒントが生まれてきたのである。

だが、ちょうどその頃、私は、いささかがっかりさせられることに遭遇した。

フランスの数学界を代表する一人に、シュバレーという人がいた。・ ・プリンストン大学、コロンビア大学で教鞭をとったこともあり、・ ・世界的な数学者として知られる人物である。

そのシュバレーが、特異点解消の問題に対して否定的である、ということを私の知人から知らされたのである。

その時、私は、ザリスキー教授とは違ったやり方で一次元の特異点を解消し、その方法に立って理論を発展させれば、おそらく二次元、三次元の特異点解消もできるに違いないと考えていたのである。その頃、シュバレーは、

「特異点解消の問題がそう簡単に解けるわけがないよ。たとえ誰かがいつかそれを解いたとしても、その頃にはもう、代数幾何学の一般論が大いに発展していて特異点解消の価値はうんと少なくなっているだろう」

といったらしい。

そう楽々と解ける問題ではないことは、二度体当たりして撥ね返された私が、誰よりも強く思い知らされている。それだからこそ、私は一層、挑戦のしがいのある問題だと闘志を燃やしていたのだが、「役に立たない」などと決めつけられては、これはもう、立つ瀬がないのである。がっかりしないわけにはいかなかった。

それより後のことだが、敬愛するグロタンディエクからも、やはり私は、張り詰めた気持ちを挫かれるような言を浴びたことがある。

・ ・空港へ向かう車中、私は、グロタンディエクに、特異点解消の話をした。

いつになく、その時の私は興奮していたようである。無理もない。その時には、私は二次元、三次元の特異点解消を独自のやり方で成し遂げ、あとはこれだけ解けさえすれば、四次元もまず大丈夫だろうという段階にまで来ていたのだ。私はグロタンディエクの反応を期待していた。彼ならば、そのことの価値を認めてくれるに違いない。・ ・

が、私の期待はみごとに裏切られたのである。

グロタンディエクは、別段、喜んだ様子もなかった。それどころか、私の熱弁の大半を、彼は左から右へと聞き流していたのである。・ ・

彼はいったのである。

「四次元の特異点解消が“大嘘”であることを証明するには、かくかくすればよし・ ・」と。

私はさながら鉄槌で頭を投打されたかのような衝撃を覚えた。

他の人ではない。半年間であるが直接に私が師事した、しかもこよなく敬愛しているグロタンディエクがいう言葉である。あいた口がふさがらないというのは、このことであろう。・ ・私が落胆したのはいうまでもない。

しかし、こうしたことが重なる一方で、逆に私を励ましてくれる人もいたのである。

その一人は、ザリスキー教授だった。・ ・ある日、構内でザリスキー教授とすれ違った。私は彼が相変わらずの多忙の身であることを知っていたから、挨拶の言葉を交わしただけで行き過ぎようとした。

だがその時彼は、私を引き止めて、

「今、何をやっているのか」

と、聞いた。

「特異点解消の問題を再考しています」

私が答えると、ちょっと考えてから、

「You need strong teeth to bite in. (お前は歯を丈夫にしておかなければならない)」

彼はこうって、私の肩を叩いたのだ。

・ ・ 彼が日本語を知っていたら「禪を締めて、かかれ」とでもいうところであろう。

ザリスキー教授は、自ら取り組んだ問題であるだけに、特異点解消の重要性を知悉していたに違ない。いずれにせよ、ありがたい激励の言葉であった、

私はまた、フランスのトムという数学者が、ある時いった言葉も、一つの発奮材料として、ときどき自分にいい聞かせていた。「代数幾何をやっている連中は、みんな腰抜けばかりじゃないか。だってそうだろう？手強い問題とみると、この問題を解いても意味がない。そういい出すのが代数幾何学者の常套手段なんだからね」

暴言ではなく、トムのこの指摘はある程度まで当たっていた。私は、彼のいう「腰抜け」にはなるまいと心に誓った。

ブランダイス大学に就職して二年目、こうして決意を新たにして特異点解消に取り組んでからしばらく経ったある夜、私はついに最後の一線を解き、問題解決の全貌をつかんだのである。

前述したように、この「特異点解消」は、一次元、二次元、三次元の段階まではザリスキー教授によって解明されていたわけである。私がやろうとしたのは、一般次元まで解明できる理論を創ることであった。私は、私の信条とする「根気強さ」で何度かチャレンジし、ついに、ザリスキー教授とはまったく違う方法で一般次元まで解明したのである。

私は受話器を取って、ザリスキー教授の自宅の電話番号を力強く回した。誰かに報告しておかないと、昂ぶった気持ちがどうにも鎮まらない気がした。

「すべての次元で解けそうです」

電話を取ったザリスキー教授に、私はいった。ザリスキー教授の声は、いつもと変わらず冷静そのものだった。どちらかというと言数の少ない彼は、その時も、「慎重にやるんだぞ」こう短い忠告を与えただけで、受話器を静かに置いた。

確かに、ここ一番、慎重に慎重を重ねないと、私は取り返しのつかない状態に陥りかねないのである。

・ ・ ・ ・ ある若い数学者が、ある大問題を解いて、その論文を発表した後、重大な誤りを指摘され再起不能に陥ったこともある。そういう不運な数学者の轍を踏まないように、ザリスキー教授はあえて「慎重にしろ」と忠告してくれたのである。

・ ・ ・ ・

それからの私は、もてる時間のすべてを論文を書くことに費やした。

・ ・ ・ ・

数学の論文は、小説を書くのと同じやり方では書けないのである。少しでも論理の歯車が噛み合わない所が目にとまると、振り出しに戻って論理を立て直し、書き改めなければならないのである。・ ・ 翌日は、それをすべて「没」にしなければならないことも少なくないのだ。その論文を書く時も、幾度、私はそういう目にあったかわからない。そんな夜が明けた朝方、大学に出て行く時の気分は、何ともやりきれないものだった。

ともあれ、筆を起こした日から二ヵ月余りで、私はついに論文を脱稿した。深夜だった。

出来上がった論文の題名は、正式には、

「Resolution of singularities of an algebraic variety of characteristic zero. (標数0の体の上の代数的多様体の特異点の解消)」

という。

その原稿はマサチューセッツ州の電話帳の厚さにも匹敵する長い論文だった。・ ・

この部分は何度読んだか知らないが、いま読んでも感動する。この業績で広中氏は日本人二人目のフィールズ賞を受けるのである。

=====

2025. 6. 29 杉岡幹生

<参考文献>

- ・「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）
- ・「マグローヒル 数学公式・数表ハンドブック」（Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社）
- ・「学問の発見」（広中平祐著、佼成出版社）