

< [四重積-二重積]対称式周辺にて (その3) > rev1.01

----- [四重積自乗四和]公式 (2倍角の公式) の発見 -----

前回と前々回の類似を行い、新たな公式 (恒等式) を六つ見出し下方に青色式で示した。つまり[四重積-二重積]対称式Ⅲと同対称式Ⅳから、それぞれ[四重積自乗四和]公式3、[四重積自乗四和]公式4を導出し、対称式Ⅲと対称式Ⅳに対応する形で (ペアで) 示した。これまでと同様、それらは2倍角の公式となっている。

以降では、双曲線関数 $\sinh$, $\cosh$ はそれぞれ sh , ch と略記した。例えば、 shy は $\sinh(y)$ のことであり、 $\text{ch}2x$ は $\cosh(2x)$ のことである。また例えば、 $\cos 2x$ は $\cos(2x)$ の意味である。

=====

[四重積-二重積]対称式Ⅲ

対称式Ⅲ(1)

$$\cos x \cdot \text{ch} x \cdot \cos y \cdot \text{sh} y + \sin x \cdot \text{sh} x \cdot \sin y \cdot \text{ch} y = \{\cos(x-y) \cdot \text{sh}(x+y) - \text{sh}(x-y) \cdot \cos(x+y)\} / 2$$

対称式Ⅲ(2)

$$\cos x \cdot \text{sh} x \cdot \cos y \cdot \text{ch} y + \sin x \cdot \text{ch} x \cdot \sin y \cdot \text{sh} y = \{\cos(x-y) \cdot \text{sh}(x+y) + \text{sh}(x-y) \cdot \cos(x+y)\} / 2$$

対称式Ⅲ(3)

$$\cos x \cdot \text{sh} x \cdot \cos y \cdot \text{ch} y - \sin x \cdot \text{ch} x \cdot \sin y \cdot \text{sh} y = \{\cos(x+y) \cdot \text{sh}(x+y) + \text{sh}(x-y) \cdot \cos(x-y)\} / 2$$

対称式Ⅲ(4)

$$\cos x \cdot \text{ch} x \cdot \cos y \cdot \text{sh} y - \sin x \cdot \text{sh} x \cdot \sin y \cdot \text{ch} y = \{\cos(x+y) \cdot \text{sh}(x+y) - \text{sh}(x-y) \cdot \cos(x-y)\} / 2$$

ここで、 x, y は任意の実数である。

=====

=====

[四重積自乗四和]公式3

式3-(1)

$$\begin{aligned} & (\cos x \cdot \text{ch} x \cdot \cos y \cdot \text{sh} y)^2 - (\sin x \cdot \text{sh} x \cdot \sin y \cdot \text{ch} y)^2 + (\cos x \cdot \text{sh} x \cdot \cos y \cdot \text{ch} y)^2 - (\sin x \cdot \text{ch} x \cdot \sin y \cdot \text{sh} y)^2 \\ &= (\cos 2x + \cos 2y) (\text{ch} 2x \cdot \text{ch} 2y - 1) / 4 \end{aligned}$$

式3-(2)

$$\begin{aligned} & (\text{ch} x \cdot \cos x \cdot \text{ch} y \cdot \sin y)^2 - (\text{sh} x \cdot \sin x \cdot \text{sh} y \cdot \cos y)^2 + (\text{ch} x \cdot \sin x \cdot \text{ch} y \cdot \cos y)^2 - (\text{sh} x \cdot \cos x \cdot \text{sh} y \cdot \sin y)^2 \\ &= (\text{ch} 2x + \text{ch} 2y) (1 - \cos 2x \cdot \cos 2y) / 4 \end{aligned}$$

式3-(3)

$$\begin{aligned} & (\operatorname{ch} x \cdot \cos x \cdot \cos y \cdot \operatorname{sh} y)^2 - (\operatorname{sh} x \cdot \sin x \cdot \sin y \cdot \operatorname{ch} y)^2 - (\operatorname{ch} x \cdot \sin x \cdot \cos y \cdot \operatorname{ch} y)^2 + (\operatorname{sh} x \cdot \cos x \cdot \sin y \cdot \operatorname{sh} y)^2 \\ &= (\operatorname{ch}^2 x + \cos^2 y) (\cos^2 x \cdot \operatorname{ch}^2 y - 1) / 4 \end{aligned}$$

ここで、 x, y は任意の実数である。

=====

=====

[四重積-二重積] 対称式Ⅳ

対称式Ⅳ(1)

$$\sin x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \cos y \cdot \operatorname{sh} y - \cos x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \sin y \cdot \operatorname{ch} y = \{\sin(x-y) \cdot \operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch}(x-y) \cdot \sin(x+y)\} / 2$$

対称式Ⅳ(2)

$$\sin x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \cos y \cdot \operatorname{ch} y - \cos x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \sin y \cdot \operatorname{sh} y = \{\sin(x-y) \cdot \operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y) \cdot \sin(x+y)\} / 2$$

対称式Ⅳ(3)

$$\sin x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \cos y \cdot \operatorname{ch} y + \cos x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \sin y \cdot \operatorname{sh} y = \{\sin(x+y) \cdot \operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y) \cdot \sin(x-y)\} / 2$$

対称式Ⅳ(4)

$$\sin x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \cos y \cdot \operatorname{sh} y + \cos x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \sin y \cdot \operatorname{ch} y = \{\sin(x+y) \cdot \operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch}(x-y) \cdot \sin(x-y)\} / 2$$

ここで、 x, y は任意の実数である。

=====

=====

[四重積自乗四和] 公式 4

式 4-(1)

$$\begin{aligned} & (\sin x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \cos y \cdot \operatorname{sh} y)^2 - (\cos x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \sin y \cdot \operatorname{ch} y)^2 + (\sin x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \cos y \cdot \operatorname{ch} y)^2 - (\cos x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \sin y \cdot \operatorname{sh} y)^2 \\ &= (\cos^2 y - \cos^2 x) (\operatorname{ch}^2 x \cdot \operatorname{ch}^2 y + 1) / 4 \end{aligned}$$

式 4-(2)

$$\begin{aligned} & (\operatorname{sh} x \cdot \sin x \cdot \operatorname{ch} y \cdot \sin y)^2 - (\operatorname{ch} x \cdot \cos x \cdot \operatorname{sh} y \cdot \cos y)^2 + (\operatorname{sh} x \cdot \cos x \cdot \operatorname{ch} y \cdot \cos y)^2 - (\operatorname{ch} x \cdot \sin x \cdot \operatorname{sh} y \cdot \sin y)^2 \\ &= (\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{ch}^2 y) (\cos^2 x \cdot \cos^2 y + 1) / 4 \end{aligned}$$

式 4-(3)

$$\begin{aligned} & (\operatorname{sh} x \cdot \sin x \cdot \cos y \cdot \operatorname{sh} y)^2 - (\operatorname{ch} x \cdot \cos x \cdot \sin y \cdot \operatorname{ch} y)^2 - (\operatorname{sh} x \cdot \cos x \cdot \cos y \cdot \operatorname{ch} y)^2 + (\operatorname{ch} x \cdot \sin x \cdot \sin y \cdot \operatorname{sh} y)^2 \\ &= (\cos^2 y - \operatorname{ch}^2 x) (\cos^2 x \cdot \operatorname{ch}^2 y + 1) / 4 \end{aligned}$$

ここで、 x, y は任意の実数である。

=====

これら青色式が得られた。Wolfram Alpha を使った数値検証でも合っていることを確認している。

導出方法は[前回](#)と[前々回](#)の類似を行えば簡単である。また左辺からの直接計算で行っても右辺を出すことは可能である。これらは2倍角の公式になっていることに注目したい。そして形が簡明できれいである！

最後に、少し前に[こちら](#)で数学者・吉田正章氏のエッセイを紹介したが、内容がすばらしいので（そこでは一部書き損じをしておりその訂正も含め）、再度掲載する。

=====

頭の良し悪しと数学

吉田正章

数学と頭の良し悪しとの関係を考えてみたい。小学校から高等学校まで算数・数学のできる子は頭が良いと言われ、そう言われると親も喜ぶのである。問題をいかに速く正確に理解し解くかという能力は確かに数学の成績で測れるであろう。この能力はある程度ないと日常生活にも困るし、またあればあるほど便利である。この能力を（計算機の演算速度みたいなものだから）cpu 能力などと呼ぶ。繰り返すと cpu 能力検査の手段として数学の問題即答競争は有効な手段であるわけである。また私の調査によると cpu 能力は本人の努力によりあまり向上しないし遺伝もしない。

さて、ある程度の歳になれば誰でも分かることだが、学問としての数学をやるには cpu 能力は実は「あれば便利」という程度のものなのである。若い頃はこのことが解からず多くの人は悩む。私もそうであった。一所懸命努力はするのだが授業は解からぬし、演習問題も解けぬし、本・論文を読んでも解からぬし、「君の成績ではここの大学院は無理だから・・・」と教室主任の先生には進路指導されるしで、私には数学の研究はできないのではないかと酷く悲観した。今思い出してもぞっとする暗い日々であった。私はもがき苦しんでやっと自分のやりたいことを見付けた。意味ある結果が出るまでに何年もかかったが何とか生き延びて今に至っている。

振り返ってみると、私は cpu 低能だったから自分の数学を見付けられたと思う。このことは説明を要するだろう。私の院生時代ある大数学者が私の興味ある分野で現代的な言葉で書かれた本を出した。私はそれを読もうと大変な努力をしたがよく解からなかったし、今も理解していない。私にとって難解なこの本を完全に理解した先輩が私の周辺に複数いて、彼らはその先のことを考えていた。そこで私としては自分の言葉で語れる自分の数学を探すしかなかったのである。

具体的な例を一つ。大学の一年生で図学というのがあった。今もあるか否か知らぬが空間図形の幾何である。私はこれについても最大の努力をしたが何度追試を受けても通らず、本来なら留年せざるを得ないところを教務係の親切なおじさんのお陰で二年生のときに一年生に混じって生物実験することで単位を揃えた。今もホルマリンの臭いをかぐと蛙の解剖をした日々を思い出す。これ以来私は直感に訴える幾何には近づかぬようにしていたが、ひょんなことからこのようなことが好きになり、今ではいっぴしの専門家のような顔をしている。ほとんどの同級生が数箇月で解かったことに私は数年かけたわけだが、時間をかけただけよく解かったと思っている。

以上、cpu 性能が悪くても（興味さえあれば）数学はできることを私の経験を例に説明した。次に大多数のそのような人に何とか生き延びるコツを伝授する。

第一に、既成の狭い分野の専門家にならぬことである。そうなるためには専門書や論文を次々と読まねばならず、苦しいのに報いは少ないからである。といっても幅広く本を読んで理解するなんて芸当はできないのだから、友達を多く持ち、いろいろなことに興味をもって、知識を交換するのがよい。

第二に、人と同じことをやっては cpu 秀才にかなわないのだから、人と違ったことをやる。はやっている数学の後追いはしない。

第三に、あることを習ったときそれがどんなに簡単に見えてもすぐに分かったと思わないことである。分かったと思うとその先に進まざるをえないが、分からないことを見付ければより基本的問題に気づく可能性がある。cpu 秀才は分かることに慣れているが、鈍才は分からないことに慣れているのが強みである。

最後に、これは cpu 性能の如何にかかわらず言えることだが、どんな人の弟子・子分にもならぬように気を付けることである。学生・院生時代の先輩（特に指導教官）には否応なく影響を受けるものだが（それは別に悪いことではなく基本的にはいいことである）、なるべく早く精神的にも学問的にも独立して数学者として対等に付き合えるようになるべきである。お茶やお花の稽古じゃないのだから、先生の真似をして褒められて喜ぶという精神状態では学問する人間として存在価値がないし、折角この世に生まれてきたのに生きている甲斐がない。御先祖様に申し訳なからう。

（よしだ・まさあき/九州大学）

=====

やはりすばらしい。こんなすごい文章を書く人というのはどんな人なのだろうかと気になり、吉田氏のほかのエッセイや論文、講演文などすこし読んでみた。さらりと述べられる中にふかく考えさせられるものが多い。数学者の中にあって数学者集団を批判的に観る視点があり、大哲学者であって、別次元からものをみられている感じがする。

2025. 6. 7 杉岡幹生

<参考文献>

- ・「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）
- ・「マグローヒル 数学公式・数表ハンドブック」（Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社）
- ・「数学のたのしみ No2」（1997 年、日本評論社）

Rev1.01 改訂 式 3-(3) と式 3-(4) は同値とわかり (x と y の置換で容易)、式 3-(4) を削除。

また式 4-(3) と式 4-(4) は同値とわかり (x と y の置換で容易)、式 4-(4) を削除。 2025. 6. 8