＜ 三角関数と双曲線関数の融合域（その４４）＞

新種の極限公式が四つ得られたので下方に青色式で示す。今回はじめてL(5)式が得られた。

極限公式が多く出すぎたので、同グループでは過去分も示したが、今回のものと関係のない他グループでは最新のもの二つずつのみを示した。

以降において、L(1)～L(5)、ζ(2)～ζ(4)は次の通り。

L(1)＝1 −1/3 +1/5 −1/7 +−・・＝π/4

L(2)＝1 $-1/3^2+1/5^2-1/7^2$ +−・・＝非明示（カタランの定数）

L(3)はL(3)＝1 $-1/3^3+1/5^3-1/7^3$ +−・・＝$\pi^3/32$

L(4)＝1 $-1/3^4+1/5^4-1/7^4$ +−・・＝非明示

L(5)はL(5)＝1 $-1/3^5+1/5^5-1/7^5$ +−・・＝$5\pi^5/1536$

ζ(2) ＝1 $+1/2^2+1/3^2+1/4^2$ +・・＝$\pi^2/6$

(3/4)ζ(2) ＝1 $+1/3^2+1/5^2+1/7^2$ +・・＝$\pi^2/8$（一つ上と実質は同じ）

ζ(3)＝1 $+1/2^3+1/3^3+1/4^3$ +・・＝非明示

ζ(4)＝1 $+1/2^4+1/3^4+1/4^4$ +・・＝$\pi^4/90$

以降では、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。a, x は任意の実数である。$\tan^{-1}$, th^{-1} はそれぞれ arctan,arctanh である。log は自然対数、e は自然対数の底。sin, cos, tan は通常の表記である。

なお、lim での a->+0 は a をプラス側から 0 に近づける意味であり、a->±0 は a をプラス側,マイナス側どちらから 0 に近づけてもＯＫの意味である。

＝＝

＜ 極限公式 ＞

◆$2^{1/2}$ ／$2^{1/4}$ ／2^{-1}／2^2 極限公式

$$\frac{1}{2}=\lim_{a\to+0}\log\left(\left(1+a^2\cdot e^{-a}\right)\left(1+a^2\cdot e^{-3a}\right)^3\left(1+a^2\cdot e^{-5a}\right)^5\left(1+a^2\cdot e^{-7a}\right)^7\cdot\cdot\right)\quad\text{--<O1−8>}$$

$$4=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin a}{\mathrm{ch}a-\sin a}\right)^{e^{-a}}\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\sin a}{\mathrm{ch}2a-\sin a}\right)^{e^{-2a}}\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin a}{\mathrm{ch}3a-\sin a}\right)^{e^{-3a}}\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\sin a}{\mathrm{ch}4a-\sin a}\right)^{e^{-4a}}\cdot\cdot\quad\text{--<Q1>}$$

◆L(2)極限公式

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}a\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}3a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}5a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}7a}\right)+\cdot\cdot\right)\quad\text{---<S1>}$$

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0} a^2\left(\frac{2}{ch2a}+\frac{4}{ch4a}+\frac{6}{ch6a}+\frac{8}{ch8a}+\cdot\cdot\right)$$

----<S1−2>

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0} a^2\left(\frac{1}{cha}+\frac{3}{ch3a}+\frac{5}{ch5a}+\frac{7}{ch7a}+\cdot\cdot\right)$$

----<S1−3>

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0} a\left(\tan^{-1}\left(\frac{cha}{sha}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{cha}{sh3a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{cha}{sh5a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{cha}{sh7a}\right)+\cdot\cdot\right)$$

--<S1−4>

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0} 2a\left(\tan^{-1}\left(\frac{cha}{sh2a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{cha}{sh6a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{cha}{sh10a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{cha}{sh14a}\right)+\cdot\cdot\right)$$

--<S1−5>

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0} a\left(\tan^{-1}\left(\frac{cosa}{sha}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{cosa}{sh3a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{cosa}{sh5a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{cosa}{sh7a}\right)+\cdot\cdot\right)$$

--<S1−6>

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0} a\left(\tan^{-1}\left(\frac{sha}{cha}\right)+3\tan^{-1}\left(\frac{sha}{ch3a}\right)+5\tan^{-1}\left(\frac{sha}{ch5a}\right)+7\tan^{-1}\left(\frac{sha}{ch7a}\right)+\cdot\cdot\right)$$

--<S1−7>

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0} a\left(th^{-1}\left(\frac{sina}{cha}\right)+3th^{-1}\left(\frac{sina}{ch3a}\right)+5th^{-1}\left(\frac{sina}{ch5a}\right)+7th^{-1}\left(\frac{sina}{ch7a}\right)+\cdot\cdot\right)$$

--<S1−8>

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0} 2a\left(\tan^{-1}\left(\frac{cha}{sh4a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{cha}{sh8a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{cha}{sh12a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{cha}{sh16a}\right)+\cdot\cdot\right)$$

--<S1−9>

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0} 2a^2\left(\frac{1}{ch3a}+\frac{2}{ch5a}+\frac{3}{ch7a}+\frac{4}{ch9a}+\frac{5}{ch11a}+\frac{6}{ch13a}+\cdot\cdot\right)$$

----<S1−10>

◆$\frac{\pi^2}{8}$極限公式　(3ζ(2)/4 極限公式)

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} 9a\left(th^{-1}\left(\frac{sha}{sh3a}\right)+3th^{-1}\left(\frac{sha}{sh9a}\right)+5th^{-1}\left(\frac{sha}{sh15a}\right)+7th^{-1}\left(\frac{sha}{sh21a}\right)+\cdot\cdot\right)$$

--<S2−11>

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} 16a\left(th^{-1}\left(\frac{sha}{sh4a}\right)+3th^{-1}\left(\frac{sha}{sh12a}\right)+5th^{-1}\left(\frac{sha}{sh20a}\right)+7th^{-1}\left(\frac{sha}{sh28a}\right)+\cdot\cdot\right)$$

--<S2−12>

◆$\frac{\pi^2}{6}$極限公式（ζ(2)極限公式）

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2a\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-3a})(1-e^{-5a})(1-e^{-7a})\cdot\cdot}\right)$$

----<S3−11>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} a\cdot\log\left(2(1+e^{-a})^2(1+e^{-2a})^2(1+e^{-3a})^2(1+e^{-4a})^2\cdot\cdot\right)$$ ----＜S3－12＞

◆$\frac{\pi}{4}$極限公式　(L(1)極限公式)

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} 8a\left(\frac{ch4a}{ch8a+cha}+\frac{ch12a}{ch24a+cha}+\frac{ch20a}{ch40a+cha}+\frac{ch28a}{ch56a+cha}+\cdot\cdot\right)$$ ---＜S4－21＞

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} 16a\left(\frac{ch8a}{ch16a+cha}+\frac{ch24a}{ch48a+cha}+\frac{ch40a}{ch80a+cha}+\frac{ch56a}{ch112a+cha}+\cdot\cdot\right)$$ ---＜S4－22＞

◆log2 極限公式

$$\log2=\lim_{a\to+0} 2a\left(\frac{e^{-2a}+cha}{ch2a+cha}+\frac{e^{-6a}+cha}{ch6a+cha}+\frac{e^{-10a}+cha}{ch10a+cha}+\frac{e^{-14a}+cha}{ch14a+cha}+\cdot\cdot\right)$$ ---＜S5－7＞

$$\log2=\lim_{a\to+0}\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{1}{e^{a}}\cdot th^{-1}\left(\frac{1}{cha}\right)+\frac{1}{e^{2a}}\cdot th^{-1}\left(\frac{1}{ch2a}\right)+\frac{1}{e^{3a}}\cdot th^{-1}\left(\frac{1}{ch3a}\right)+\frac{1}{e^{4a}}\cdot th^{-1}\left(\frac{1}{ch4a}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --＜5－8＞

◆ζ(3)極限公式

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{16a^2}{3}\log\left(2(1+e^{-2a})^2(1+e^{-4a})^3(1+e^{-6a})^4(1+e^{-8a})^5\cdot\cdot\right)$$ ---＜S6－22＞

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{16a^2}{3}\log\left((1+e^{a})(1+e^{-a})^2(1+e^{-3a})^3(1+e^{-5a})^4\cdot\cdot\right)$$ ---＜S6－23＞

◆ $\frac{\pi^3}{32}$極限公式　(L(3)極限公式)

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0} 2a^3\left(\frac{1^2}{ch2a}+\frac{2^2}{ch4a}+\frac{3^2}{ch6a}+\frac{4^2}{ch8a}+\cdot\cdot\right)$$ -----＜S7－1＞

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0} 2a^2\left(\tan^{-1}(e^{-a})+3\tan^{-1}(e^{-3a})+5\tan^{-1}(e^{-5a})+7\tan^{-1}(e^{-7a})+\cdot\cdot\right)$$ --＜S7－2＞

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0} a^2\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{sha}\right)+3\tan^{-1}\left(\frac{1}{sh3a}\right)+5\tan^{-1}\left(\frac{1}{sh5a}\right)+7\tan^{-1}\left(\frac{1}{sh7a}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --＜S7－3＞

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0} a^2\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}a}\right)+3\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}3a}\right)+5\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}5a}\right)+7\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}7a}\right)+\cdot\ \cdot\right) \qquad \text{--<S7−4>}$$

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0} 2a^2\left(\tan^{-1}(e^{-2a})+3\tan^{-1}(e^{-4a})+5\tan^{-1}(e^{-6a})+7\tan^{-1}(e^{-8a})+\cdot\ \cdot\right) \qquad \text{--<S7−5>}$$

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0} 2a^2\left(\tan^{-1}(1)+3\tan^{-1}(e^{-2a})+5\tan^{-1}(e^{-4a})+7\tan^{-1}(e^{-6a})+\cdot\ \cdot\right) \qquad \text{--<S7−6>}$$

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0} 2a^2\left(\tan^{-1}(e^{a})+3\tan^{-1}(e^{-a})+5\tan^{-1}(e^{-3a})+7\tan^{-1}(e^{-5a})+\cdot\ \cdot\right) \qquad \text{--<S7−7>}$$

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0} 2a^3\left(\frac{2\times1}{\mathrm{ch}5a}+\frac{3\times2}{\mathrm{ch}7a}+\frac{4\times3}{\mathrm{ch}9a}+\frac{5\times4}{\mathrm{ch}11a}+\frac{6\times5}{\mathrm{ch}13a}+\frac{7\times6}{\mathrm{ch}15a}+\cdot\ \cdot\right) \qquad \text{--<S7−8>}$$

◆ e^{π}極限公式

$$e^{\pi}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin a}{\mathrm{ch}a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\sin a}{\mathrm{ch}2a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin a}{\mathrm{ch}3a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\sin a}{\mathrm{ch}4a-\sin a}\right)\cdot\ \cdot \qquad \text{--<S8−1>}$$

$$e^{\pi}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin a}{\mathrm{ch}a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin a}{\mathrm{ch}3a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}5a+\sin a}{\mathrm{ch}5a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}7a+\sin a}{\mathrm{ch}7a-\sin a}\right)^2\cdot\ \cdot \qquad \text{--<S8−2>}$$

◆ $e^{\pi x}$[恒等]極限公式

$$e^{\pi x}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin ax}{\mathrm{ch}a-\sin ax}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\sin ax}{\mathrm{ch}2a-\sin ax}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin ax}{\mathrm{ch}3a-\sin ax}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\sin ax}{\mathrm{ch}4a-\sin ax}\right)\cdot\ \cdot \qquad \text{--<S8−1−2>}$$

$$e^{\pi x}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin ax}{\mathrm{ch}a-\sin ax}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin ax}{\mathrm{ch}3a-\sin ax}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}5a+\sin ax}{\mathrm{ch}5a-\sin ax}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}7a+\sin ax}{\mathrm{ch}7a-\sin ax}\right)^2\cdot\ \cdot \qquad \text{--<S8−2−2>}$$

◆ ゼータの香りの漂う公式の極限公式

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{\mathrm{sh}(3\pi/2)-\mathrm{sh}(\pi/2)}{\mathrm{sh}(2\pi)}=\frac{1}{1^2+1}-\frac{3}{3^2+1}+\frac{5}{5^2+1}-\frac{7}{7^2+1}+-\cdot\ \cdot$$

$$=\lim_{a\to+0} a\left(\frac{\mathrm{sh}2a\cdot\sin a}{\mathrm{ch}4a+\mathrm{ch}2a}+\frac{\mathrm{sh}3a\cdot\sin 2a}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}2a}+\frac{\mathrm{sh}4a\cdot\sin 3a}{\mathrm{ch}8a+\mathrm{ch}2a}+\frac{\mathrm{sh}5a\cdot\sin 4a}{\mathrm{ch}10a+\mathrm{ch}2a}+\cdot\ \cdot\right) \qquad \text{---<S9−12>}$$

$$\frac{1}{1^2+1}-\frac{1}{3^2+1}+\frac{1}{5^2+1}-\frac{1}{7^2+1}+-\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to\pm0}\left(\sin a\cdot \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{ch}a}\right)+\sin 3a\cdot \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{ch}3a}\right)+\sin 5a\cdot \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{ch}5a}\right)+\sin 7a\cdot \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{ch}7a}\right)+\cdot\cdot\right) \text{--<S9-13>}$$

◆ π √2/4 極限公式（虚 2 次体 Q(√-2) ゼータ L2(1) 極限公式）

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{4}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}++--\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0}2a\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a}+\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{ch}6a}+\frac{\mathrm{ch}5a}{\mathrm{ch}10a}+\frac{\mathrm{ch}7a}{\mathrm{ch}14a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S10-1>}$$

◆ (1/√2) log (1+√2) 極限公式（実 2 次体 Q(√2) ゼータ L1(1) 極限公式）

$$\frac{\log(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}-\frac{1}{13}+\frac{1}{15}+--+\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0}2a\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}2a}+\frac{\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}6a}+\frac{\mathrm{sh}5a}{\mathrm{ch}10a}+\frac{\mathrm{sh}7a}{\mathrm{ch}14a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S11-1>}$$

◆L(4)極限公式

$$L(4)=\lim_{a\to\pm0}\frac{2a^4}{3}\left(\frac{1\times2\times3}{\mathrm{ch}3a}+\frac{2\times3\times5}{\mathrm{ch}5a}+\frac{3\times4\times7}{\mathrm{ch}7a}+\frac{4\times5\times9}{\mathrm{ch}9a}+\frac{5\times6\times11}{\mathrm{ch}11a}+\frac{6\times7\times13}{\mathrm{ch}13a}+\cdot\cdot\right) \text{--<S12-1>}$$

$$L(4)=\lim_{a\to\pm0}\frac{4a^4}{3}\left(\frac{3\times2\times1}{\mathrm{ch}7a}+\frac{4\times3\times2}{\mathrm{ch}9a}+\frac{5\times4\times3}{\mathrm{ch}11a}+\frac{6\times5\times4}{\mathrm{ch}13a}+\frac{7\times6\times5}{\mathrm{ch}15a}+\frac{8\times7\times6}{\mathrm{ch}17a}+\cdot\cdot\right) \text{--<S12-2>}$$

◆$\frac{\pi^4}{90}$極限公式　（ζ (4) 極限公式）

$$\frac{\pi^4}{90}=\lim_{a\to+0}\frac{32a^4}{45}\left(\frac{1\times2\times3}{\mathrm{sh}3a}+\frac{2\times3\times5}{\mathrm{sh}5a}+\frac{3\times4\times7}{\mathrm{sh}7a}+\frac{4\times5\times9}{\mathrm{sh}9a}+\frac{5\times6\times11}{\mathrm{sh}11a}+\frac{6\times7\times13}{\mathrm{sh}13a}+\cdot\cdot\right) \text{--<S13-1>}$$

◆ $\frac{5\pi^5}{1536}$極限公式　(L (5) 極限公式)

$$\frac{5\pi^5}{1536}=\lim_{a\to+0}\frac{2a^5}{3}\left(\frac{4\times3\times2\times1}{\mathrm{ch}9a}+\frac{5\times4\times3\times2}{\mathrm{ch}11a}+\frac{6\times5\times4\times3}{\mathrm{ch}13a}+\frac{7\times6\times5\times4}{\mathrm{ch}15a}+\frac{8\times7\times6\times5}{\mathrm{ch}17a}+\cdot\cdot\right) \text{--<S14-1>}$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

これらの四つの青色式が得られた。Wolfram Alpha の数値検証でも式の成立を確認している。

四式を並べよう。

$$L(2)=\lim_{a\to\pm 0} 2a^2\left(\frac{1}{ch3a}+\frac{2}{ch5a}+\frac{3}{ch7a}+\frac{4}{ch9a}+\frac{5}{ch11a}+\frac{6}{ch13a}+\cdot\cdot\right) \quad ----\text{<S1-10>}$$

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to +0} 2a^3\left(\frac{2\times 1}{ch5a}+\frac{3\times 2}{ch7a}+\frac{4\times 3}{ch9a}+\frac{5\times 4}{ch11a}+\frac{6\times 5}{ch13a}+\frac{7\times 6}{ch15a}+\cdot\cdot\right) \quad --\text{<S7-8>}$$

$$L(4)=\lim_{a\to\pm 0}\frac{4a^4}{3}\left(\frac{3\times 2\times 1}{ch7a}+\frac{4\times 3\times 2}{ch9a}+\frac{5\times 4\times 3}{ch11a}+\frac{6\times 5\times 4}{ch13a}+\frac{7\times 6\times 5}{ch15a}+\frac{8\times 7\times 6}{ch17a}+\cdot\cdot\right) \quad --\text{<S12-2>}$$

$$\frac{5\pi^5}{1536}=\lim_{a\to +0}\frac{2a^5}{3}\left(\frac{4\times 3\times 2\times 1}{ch9a}+\frac{5\times 4\times 3\times 2}{ch11a}+\frac{6\times 5\times 4\times 3}{ch13a}+\frac{7\times 6\times 5\times 4}{ch15a}+\frac{8\times 7\times 6\times 5}{ch17a}+\cdot\cdot\right) \quad --\text{<S14-1>}$$

どれも面白い形である。

上から順番に右辺の初項の分母が ch3a⇒ch5a⇒ch7a⇒ch9a となっている点がまず面白い。分子もきれいな規則から成っている。

なお、L(3)＝π^3/32、L(5)＝5π^5/1536 である。また L(2)、L(4) は明示的な値は知られていない。

ちなみに、それらを数値で表すと次となる。

L(2)＝0.91596559・・

L(3)＝π^3/32＝0.96894614・・

L(4)＝0.98894455・・

L(5)＝5π^5/1536＝0.99615782・・

さて、今回の式の中から L(2) 式の＜Ｓ１－１０＞の証明を以下に示す。詳細な式変形はとばした。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜S1－10＞の証明

下式[1]の右辺から出発する。その右辺を１３年前のこちらの 2012/8/16 の[導出]と類似的な方法を使って変形していくと[1]の左辺に到達する。途中でゼータの香りの漂う・・（その３０７）でのフーリエ級数を使う。

（注意：その頁でフーリエ級数の表現を使っているが、それらは恒等式である。x に制限を加えているが、じつは x は任意の実数である）。この[1]は三変数の恒等式となっている。

$$\left(\frac{\cos x}{e^a}\right)\frac{1}{(1+\alpha^2\cdot e^{-2a})}-\left(\frac{\cos 3x}{e^{3a}}\right)\frac{1}{(1+\alpha^2\cdot e^{-6a})}+\left(\frac{\cos 5x}{e^{5a}}\right)\frac{1}{(1+\alpha^2\cdot e^{-10a})}-\left(\frac{\cos 7x}{e^{7a}}\right)\frac{1}{(1+\alpha^2\cdot e^{-14a})}+-\cdot\cdot$$

$$=\cos x\left(\frac{cha}{ch2a+\cos 2x}-\frac{\alpha^2\cdot ch3a}{ch6a+\cos 2x}+\frac{\alpha^4\cdot ch5a}{ch10a+\cos 2x}-\frac{\alpha^6\cdot ch7a}{ch14a+\cos 2x}+-\cdot\cdot\right) \quad -----[1]$$

$(a>0,\ x$ は任意実数$, \alpha$ はe^aより小さい$)$

両辺をαで微分して別式Ａ（その式は略）を得る。その別式Ａでαにｉ（虚数単位）を代入し、ｘに０を代入して変形していくと次の式[2]を得る。

$$\left(\frac{1}{e^{a}}\right)\frac{1}{(1-e^{-2a})^2}-\left(\frac{1}{e^{3a}}\right)\frac{1}{(1-e^{-6a})^2}+\left(\frac{1}{e^{5a}}\right)\frac{1}{(1-e^{-10a})^2}-\left(\frac{1}{e^{7a}}\right)\frac{1}{(1-e^{-14a})^2}+-\cdot\cdot$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{ch3a}+\frac{2}{ch5a}+\frac{3}{ch7a}+\frac{4}{ch9a}+\frac{5}{ch11a}+\frac{6}{ch13a}+\cdot\cdot\right)\qquad\text{-----[2]}$$

上式に対し、両辺に a^2 を掛けて（左辺は各項に掛ける）、a を０に近づけていく。左辺では何度かロピタルの定理を使って計算を行うと最終的に左辺はＬ(2)/4 となる。形を整え、よって次の目標のＬ(2)式が得られた。

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}2a^2\left(\frac{1}{ch3a}+\frac{2}{ch5a}+\frac{3}{ch7a}+\frac{4}{ch9a}+\frac{5}{ch11a}+\frac{6}{ch13a}+\cdot\cdot\right)\qquad\text{----<S1−10>}$$

終わり。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このようにして＜Ｓ１－１０＞は得られた。

なお、今回のＬ(3)式、Ｌ(4)式、Ｌ(5)式もこのＬ(2)式と類似の方法で得られていく。すなわち証明中の別式Ａをさらにαで微分した別式Ｂを出せば、そこから上記証明と同様にしてＬ(3)極限公すなわちπ^3/32 極限公式＜Ｓ７－８＞が出る。さらにその別式Ｂを微分した別式Ｃから同様にしてＬ(4)極限公式＜Ｓ１２－２＞が出る。さらにその別式Ｃをαで微分した別式ＤからＬ(5)極限公式すなわち５π^5/1536 極限公式＜Ｓ１４－１＞が出る。

このように階段を一つずつ降りるように次々と無数に得られていく。

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●再び四式を眺めよう。

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}2a^2\left(\frac{1}{ch3a}+\frac{2}{ch5a}+\frac{3}{ch7a}+\frac{4}{ch9a}+\frac{5}{ch11a}+\frac{6}{ch13a}+\cdot\cdot\right)\qquad\text{----<S1−10>}$$

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0}2a^3\left(\frac{2\times1}{ch5a}+\frac{3\times2}{ch7a}+\frac{4\times3}{ch9a}+\frac{5\times4}{ch11a}+\frac{6\times5}{ch13a}+\frac{7\times6}{ch15a}+\cdot\cdot\right)\qquad\text{--<S7−8>}$$

$$L(4)=\lim_{a\to\pm0}\frac{4a^4}{3}\left(\frac{3\times2\times1}{ch7a}+\frac{4\times3\times2}{ch9a}+\frac{5\times4\times3}{ch11a}+\frac{6\times5\times4}{ch13a}+\frac{7\times6\times5}{ch15a}+\frac{8\times7\times6}{ch17a}+\cdot\cdot\right)\qquad\text{--<S12−2>}$$

$$\frac{5\pi^5}{1536}=\lim_{a\to+0}\frac{2a^5}{3}\left(\frac{4\times3\times2\times1}{ch9a}+\frac{5\times4\times3\times2}{ch11a}+\frac{6\times5\times4\times3}{ch13a}+\frac{7\times6\times5\times4}{ch15a}+\frac{8\times7\times6\times5}{ch17a}+\cdot\cdot\right)\qquad\text{--<S14−1>}$$

L(2)とL(4)は、現代においても無理数かどうかさえわかっていない。上を眺めてゼータの美と調和を信じるものからすれば、無理数に決まっている！ のであるが・・

●次の二式も比べたい。

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0} a^2\left(\frac{1}{\mathrm{ch}a}+\frac{3}{\mathrm{ch}3a}+\frac{5}{\mathrm{ch}5a}+\frac{7}{\mathrm{ch}7a}+\cdot\cdot\right) \qquad \text{----<S1-3>}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} a^2\left(\frac{1}{\mathrm{sh}a}+\frac{3}{\mathrm{sh}3a}+\frac{5}{\mathrm{sh}5a}+\frac{7}{\mathrm{sh}7a}+\cdot\cdot\right) \qquad \text{----<S2-4>}$$

これらを比べても、やっぱりL(2)は無理数に決まっている。
この対称的な形において、もし「L(2)は有理数だ」などということになればたいへん！！である。数学者・加藤和也さん流にいうと「もしL(2)が有理数だなんてことになれば、さっさと切腹用の白装束に着替え始める人が続出する！」となる。
これは、「解決！フェルマーの最終定理」（加藤和也著、日本評論社）p.67にある
「・・楕円曲線のゼータ関数の性質は、数論の美と調和を信ずる数論研究者なら必ず信じてしまうと言ってもいいものですので、もし谷山-志村予想が誤りだなんてことになれば、さっさと切腹用の白装束に着替え始める人が続出しかねません。」からとったものだが面白い表現であり、印象に残っている。

● L(4)の二式を比べたい。

$$L(4)=\lim_{a\to\pm0}\frac{2a^4}{3}\left(\frac{1\times2\times3}{\mathrm{ch}3a}+\frac{2\times3\times5}{\mathrm{ch}5a}+\frac{3\times4\times7}{\mathrm{ch}7a}+\frac{4\times5\times9}{\mathrm{ch}9a}+\frac{5\times6\times11}{\mathrm{ch}11a}+\frac{6\times7\times13}{\mathrm{ch}13a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S12-1>}$$

$$L(4)=\lim_{a\to\pm0}\frac{4a^4}{3}\left(\frac{3\times2\times1}{\mathrm{ch}7a}+\frac{4\times3\times2}{\mathrm{ch}9a}+\frac{5\times4\times3}{\mathrm{ch}11a}+\frac{6\times5\times4}{\mathrm{ch}13a}+\frac{7\times6\times5}{\mathrm{ch}15a}+\frac{8\times7\times6}{\mathrm{ch}17a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S12-2>}$$

これらは似ているようで全く違っている。分子の規則も違うし、はじまりの分母も違う。
分子は前者はn(n+1)(2n+1)、後者は(n+2)(n+1)nである。
いずれの式も今回の証明中の[1]の母等式から出たものだが、[1]から違った操作（式変形）によってそれぞれ導出された。右辺はこんなにも形がちがうのに同じL(4)に収束するというのは、証明を知っていてもふしぎである。
＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2025.5.17 杉岡幹生

＜参考文献＞
・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)
・「解決！フェルマーの最終定理」（加藤和也著、日本評論社）