＜ 三角関数と双曲線関数の融合域（その４２）＞

新種の極限公式が１４個得られたので下方に青色式で示す。公式が多く出すぎたので、同グループでは今回分をメインにし、過去分は数個だけ加えた。他グループでは最新のもの二つずつを示した。

以降において、L(2)はL(2)＝1 $-1/3^2+1/5^2-1/7^2$ +−・・である（カタランの定数）。
ζ(3)はζ(3)＝1 $+1/2^3+1/3^3+1/4^3$ +・・で、L(3)はL(3)＝1 $-1/3^3+1/5^3-1/7^3$ +−・・＝$\pi^3/32$ である。
π/4 はL(1)＝1 −1/3 +1/5 −1/7 +−・・＝π/4 であり、$\pi^2/6$ はζ(2) ＝1 $+1/2^2+1/3^2+1/4^2$ +・・＝$\pi^2/6$、$\pi^2/8$ は(3/4)ζ(2) ＝1 $+1/3^2+1/5^2+1/7^2$ +・・＝$\pi^2/8$。

さらに以下では、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。a, x は任意の実数である。$\tan^{-1}$, th^{-1} はそれぞれ arctan,arctanh である。log は自然対数、e は自然対数の底。sin, cos, tan は通常の表記である。

なお、lim での a->+0 は a をプラス側から 0 に近づける意味であり、a->±0 は a をプラス側,マイナス側どちらから 0 に近づけてもＯＫの意味である。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜ 極限公式 ＞

◆$2^{1/2}$ ／$2^{1/4}$ ／2^{-1}／2^2 極限公式

$$\frac{1}{2}=\lim_{a\to+0}\log\left(\left(1+a^2\cdot e^{-a}\right)\left(1+a^2\cdot e^{-3a}\right)^3\left(1+a^2\cdot e^{-5a}\right)^5\left(1+a^2\cdot e^{-7a}\right)^7\cdot\cdot\right)\quad \text{--＜O1−8＞}$$

$$4=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin a}{\mathrm{ch}a-\sin a}\right)^{e^{-a}}\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\sin a}{\mathrm{ch}2a-\sin a}\right)^{e^{-2a}}\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin a}{\mathrm{ch}3a-\sin a}\right)^{e^{-3a}}\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\sin a}{\mathrm{ch}4a-\sin a}\right)^{e^{-4a}}\cdot\cdot\quad \text{--＜Q1＞}$$

◆L(2)極限公式

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}a\left(\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{ch}a}\right)+3\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{ch}3a}\right)+5\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{ch}5a}\right)+7\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{ch}7a}\right)+\cdot\cdot\right)\quad \text{--＜S1−8＞}$$

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}2a\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}4a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}8a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}12a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}16a}\right)+\cdot\cdot\right)\quad \text{--＜S1−9＞}$$

◆$\frac{\pi^2}{8}$極限公式 （3ζ(2)/4 極限公式）

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} a\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sina}}{\mathrm{sha}}\right)+3\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sina}}{\mathrm{sh3a}}\right)+5\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sina}}{\mathrm{sh5a}}\right)+7\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sina}}{\mathrm{sh7a}}\right)+\cdot\cdot\right)\quad \text{--<S2−9>}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} 4a\left(\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh2a}}\right)+3\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh6a}}\right)+5\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh10a}}\right)+7\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh14a}}\right)+\cdot\cdot\right)\quad \text{--<S2−10>}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} 9a\left(\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh3a}}\right)+3\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh9a}}\right)+5\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh15a}}\right)+7\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh21a}}\right)+\cdot\cdot\right)\quad \text{--<S2−11>}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} 16a\left(\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh4a}}\right)+3\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh12a}}\right)+5\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh20a}}\right)+7\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh28a}}\right)+\cdot\cdot\right)\quad \text{--<S2−12>}$$

◆$\frac{\pi^2}{6}$極限公式（ζ(2)極限公式）

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2a\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-3a})(1-e^{-5a})(1-e^{-7a})\cdot\cdot}\right)\quad \text{----<S3−11>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} a\cdot\log\left(2(1+e^{-a})^2(1+e^{-2a})^2(1+e^{-3a})^2(1+e^{-4a})^2\cdot\cdot\right)\quad \text{----<S3−12>}$$

◆$\frac{\pi}{4}$極限公式　(L(1)極限公式)

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} 2a\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a+cha}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{ch6a+cha}}+\frac{\mathrm{ch5a}}{\mathrm{ch10a+cha}}+\frac{\mathrm{ch7a}}{\mathrm{ch14a+cha}}+\cdot\cdot\right)\quad \text{----<S4−4>}$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} 4a\left(\frac{\mathrm{ch2a}}{\mathrm{ch4a+cha}}+\frac{\mathrm{ch6a}}{\mathrm{ch12a+cha}}+\frac{\mathrm{ch10a}}{\mathrm{ch20a+cha}}+\frac{\mathrm{ch14a}}{\mathrm{ch28a+cha}}+\cdot\cdot\right)\quad \text{---<S4−20>}$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} 8a\left(\frac{\mathrm{ch4a}}{\mathrm{ch8a+cha}}+\frac{\mathrm{ch12a}}{\mathrm{ch24a+cha}}+\frac{\mathrm{ch20a}}{\mathrm{ch40a+cha}}+\frac{\mathrm{ch28a}}{\mathrm{ch56a+cha}}+\cdot\cdot\right)\quad \text{---<S4−21>}$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} 16a\left(\frac{\mathrm{ch8a}}{\mathrm{ch16a+cha}}+\frac{\mathrm{ch24a}}{\mathrm{ch48a+cha}}+\frac{\mathrm{ch40a}}{\mathrm{ch80a+cha}}+\frac{\mathrm{ch56a}}{\mathrm{ch112a+cha}}+\cdot\cdot\right)\quad \text{---<S4−22>}$$

◆log2 極限公式

$$\log 2=\lim_{a\to+0} 2a\left(\frac{e^{-2a}+\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a+cha}}+\frac{e^{-6a}+\mathrm{cha}}{\mathrm{ch6a+cha}}+\frac{e^{-10a}+\mathrm{cha}}{\mathrm{ch10a+cha}}+\frac{e^{-14a}+\mathrm{cha}}{\mathrm{ch14a+cha}}+\cdot\cdot\right)\quad \text{---<S5−7>}$$

$$\log 2=\lim_{a\to+0}\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{1}{e^{a}}\cdot\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{cha}}\right)+\frac{1}{e^{2a}}\cdot\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{ch2a}}\right)+\frac{1}{e^{3a}}\cdot\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{ch3a}}\right)+\frac{1}{e^{4a}}\cdot\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{ch4a}}\right)+\cdot\cdot\right)\quad \text{--<5−8>}$$

◆ζ(3)極限公式

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{16a^2}{3}\log\left((1+e^{-2a})(1+e^{-4a})^2(1+e^{-6a})^3(1+e^{-8a})^4\cdot\cdot\right)$$ ---<S6−8>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{16a^2}{3}\log\left((1+e^{-a})(1+e^{-3a})^2(1+e^{-5a})^3(1+e^{-7a})^4\cdot\cdot\right)$$ ---<S6−20>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{16a^2}{3}\log\left((1+e^{-3a})(1+e^{-5a})^2(1+e^{-7a})^3(1+e^{-9a})^4\cdot\cdot\right)$$ ---<S6−21>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{16a^2}{3}\log(2(1+e^{-2a})^2(1+e^{-4a})^3(1+e^{-6a})^4(1+e^{-8a})^5\cdot\cdot)$$ ---<S6−22>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{16a^2}{3}\log\left((1+e^{a})(1+e^{-a})^2(1+e^{-3a})^3(1+e^{-5a})^4\cdot\cdot\right)$$ ---<S6−23>

◆ $\frac{\pi^3}{32}$極限公式　(L(3)極限公式)

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0}2a^2\left(\tan^{-1}(e^{-a})+3\tan^{-1}(e^{-3a})+5\tan^{-1}(e^{-5a})+7\tan^{-1}(e^{-7a})+\cdot\cdot\right)$$ --<S7−2>

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0}2a^2\left(\tan^{-1}(e^{-2a})+3\tan^{-1}(e^{-4a})+5\tan^{-1}(e^{-6a})+7\tan^{-1}(e^{-8a})+\cdot\cdot\right)$$ --<S7−5>

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0}2a^2\left(\tan^{-1}(1)+3\tan^{-1}(e^{-2a})+5\tan^{-1}(e^{-4a})+7\tan^{-1}(e^{-6a})+\cdot\cdot\right)$$ --<S7−6>

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0}2a^2\left(\tan^{-1}(e^{a})+3\tan^{-1}(e^{-a})+5\tan^{-1}(e^{-3a})+7\tan^{-1}(e^{-5a})+\cdot\cdot\right)$$ --<S7−7>

◆ e^{π}極限公式

$$e^{\pi}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin a}{\mathrm{ch}a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\sin a}{\mathrm{ch}2a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin a}{\mathrm{ch}3a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\sin a}{\mathrm{ch}4a-\sin a}\right)\cdot\cdot$$ --<S8−1>

$$e^{\pi}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin a}{\mathrm{ch}a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin a}{\mathrm{ch}3a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}5a+\sin a}{\mathrm{ch}5a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}7a+\sin a}{\mathrm{ch}7a-\sin a}\right)^2\cdot\cdot$$ --<S8−2>

◆ $e^{\pi x}$ [恒等]極限公式

$$e^{\pi x}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin ax}{\mathrm{ch}a-\sin ax}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\sin ax}{\mathrm{ch}2a-\sin ax}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin ax}{\mathrm{ch}3a-\sin ax}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\sin ax}{\mathrm{ch}4a-\sin ax}\right)\cdot\cdot$$ --<S8−1−2>

$$e^{\pi x}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin ax}{\mathrm{ch}a-\sin ax}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin ax}{\mathrm{ch}3a-\sin ax}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}5a+\sin ax}{\mathrm{ch}5a-\sin ax}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}7a+\sin ax}{\mathrm{ch}7a-\sin ax}\right)^2\cdot\cdot$$ --<S8−2−2>

◆ ゼータの香りの漂う公式の極限公式

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{\mathrm{sh}(3\pi/2)-\mathrm{sh}(\pi/2)}{\mathrm{sh}(2\pi)}=\frac{1}{1^2+1}-\frac{3}{3^2+1}+\frac{5}{5^2+1}-\frac{7}{7^2+1}+-\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0}\sin a\left(\frac{\mathrm{sh}2a\cdot\sin a}{\mathrm{ch}4a+\cos 2a}+\frac{\mathrm{sh}3a\cdot\sin 2a}{\mathrm{ch}6a+\cos 2a}+\frac{\mathrm{sh}4a\cdot\sin 3a}{\mathrm{ch}8a+\cos 2a}+\frac{\mathrm{sh}5a\cdot\sin 4a}{\mathrm{ch}10a+\cos 2a}+\cdot\cdot\right)$$ --<S9−11>

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{\mathrm{sh}(3\pi/2)-\mathrm{sh}(\pi/2)}{\mathrm{sh}(2\pi)}=\frac{1}{1^2+1}-\frac{3}{3^2+1}+\frac{5}{5^2+1}-\frac{7}{7^2+1}+-\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}a\left(\frac{\mathrm{sh}2a\cdot\sin a}{\mathrm{ch}4a+\mathrm{ch}2a}+\frac{\mathrm{sh}3a\cdot\sin 2a}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}2a}+\frac{\mathrm{sh}4a\cdot\sin 3a}{\mathrm{ch}8a+\mathrm{ch}2a}+\frac{\mathrm{sh}5a\cdot\sin 4a}{\mathrm{ch}10a+\mathrm{ch}2a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S9−12>

◆π√2/4 極限公式（虚 2 次体 Q(√−2)ゼータ L2(1)極限公式）

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{4}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}++--\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}2a\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a}+\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{ch}6a}+\frac{\mathrm{ch}5a}{\mathrm{ch}10a}+\frac{\mathrm{ch}7a}{\mathrm{ch}14a}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S10−1>

◆(1/√2) log(1+√2) 極限公式（実 2 次体 Q(√2)ゼータ L1(1)極限公式）

$$\frac{\log(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}-\frac{1}{13}+\frac{1}{15}+--+\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0}2\mathrm{sh}a\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}2a}+\frac{\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}6a}+\frac{\mathrm{sh}5a}{\mathrm{ch}10a}+\frac{\mathrm{sh}7a}{\mathrm{ch}14a}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S11−1>

==================================

これらの青色式が得られた。Wolfram Alpha の数値検証でも式の成立を確認している。

π^2/8 式を並べる。

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} a\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sina}}{\mathrm{sha}}\right)+3\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sina}}{\mathrm{sh3a}}\right)+5\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sina}}{\mathrm{sh5a}}\right)+7\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sina}}{\mathrm{sh7a}}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --<S2−9>

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} 4a\left(\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh2a}}\right)+3\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh6a}}\right)+5\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh10a}}\right)+7\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh14a}}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --<S2−10>

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} 9a\left(\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh3a}}\right)+3\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh9a}}\right)+5\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh15a}}\right)+7\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh21a}}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --<S2−11>

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} 16a\left(\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh4a}}\right)+3\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh12a}}\right)+5\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh20a}}\right)+7\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh28a}}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --<S2−12>

美しい式である。＜Ｓ２－１０＞から下で、きれいな規則性があり、これらは同じ規則で延々と下へと延びていく。つまり無限個の式が存在している。

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●π/4 式を並べよう。

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} 2a\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a+cha}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{ch6a+cha}}+\frac{\mathrm{ch5a}}{\mathrm{ch10a+cha}}+\frac{\mathrm{ch7a}}{\mathrm{ch14a+cha}}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S4−4>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} 4a\left(\frac{\mathrm{ch2a}}{\mathrm{ch4a+cha}}+\frac{\mathrm{ch6a}}{\mathrm{ch12a+cha}}+\frac{\mathrm{ch10a}}{\mathrm{ch20a+cha}}+\frac{\mathrm{ch14a}}{\mathrm{ch28a+cha}}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S4−20>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} 8a\left(\frac{\mathrm{ch4a}}{\mathrm{ch8a+cha}}+\frac{\mathrm{ch12a}}{\mathrm{ch24a+cha}}+\frac{\mathrm{ch20a}}{\mathrm{ch40a+cha}}+\frac{\mathrm{ch28a}}{\mathrm{ch56a+cha}}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S4−21>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} 16a\left(\frac{\mathrm{ch8a}}{\mathrm{ch16a+cha}}+\frac{\mathrm{ch24a}}{\mathrm{ch48a+cha}}+\frac{\mathrm{ch40a}}{\mathrm{ch80a+cha}}+\frac{\mathrm{ch56a}}{\mathrm{ch112a+cha}}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S4−22>

これらも本当に美しく、きれいな規則が出ている。これも地下へと無限に延びていく。

●π^3/32 式を眺める。規則がわかるように順番を並べ替えた。茶色の所は 1 だがあえてそのように表現した。

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0} 2a^2\left(\tan^{-1}(e^{a})+3\tan^{-1}(e^{-a})+5\tan^{-1}(e^{-3a})+7\tan^{-1}(e^{-5a})+\cdot\cdot\right)$$ --<S7−7>

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0} 2a^2\left(\tan^{-1}(e^{0a})+3\tan^{-1}(e^{-2a})+5\tan^{-1}(e^{-4a})+7\tan^{-1}(e^{-6a})+\cdot\cdot\right)$$ --<S7−6>

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0} 2a^2\left(\tan^{-1}(e^{-a})+3\tan^{-1}(e^{-3a})+5\tan^{-1}(e^{-5a})+7\tan^{-1}(e^{-7a})+\cdot\cdot\right)$$ --<S7−2>

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0} 2a^2\left(\tan^{-1}(e^{-2a})+3\tan^{-1}(e^{-4a})+5\tan^{-1}(e^{-6a})+7\tan^{-1}(e^{-8a})+\cdot\cdot\right)$$ --<S7−5>

これは前回のζ(3)式と同じような興味深い特徴が出ている。それは右辺の外枠の式の形はまったく同じなのに、$\tan^{-1}$ の()内の e^{-na} だけがきれいな規則で置き換わっているという面白いものである。その性質でもってやはり上記式も上へ下へと延々と延びていく。つまり無限個の式が存在する。

●上記式は次の三変数母等式から生まれた。

$$\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{a}}\right)\cdot\cos x-\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{3a}}\right)\cdot\cos 3x+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{5a}}\right)\cdot\cos 5x-\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{7a}}\right)\cdot\cos 7x+-\cdot\cdot$$

$$=\cos x\left(\frac{\alpha\cdot\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a+\cos 2x}+\frac{\alpha^3\cdot\mathrm{ch}3a}{3(\mathrm{ch}6a+\cos 2x)}+\frac{\alpha^5\cdot\mathrm{ch}5a}{5(\mathrm{ch}10a+\cos 2x)}+\frac{\alpha^7\cdot\mathrm{ch}7a}{7(\mathrm{ch}14a+\cos 2x)}+\cdot\cdot\right)$$ ---①

上記式に対し、両辺に 1/cosx を掛け（<u>左辺は各項に掛ける</u>）、x をπ/2 に近づけていき（x→π/2）（左辺にはロピタルの定理を適用）、その後さらにαに $i\cdot e^{na}$ を代入して（n を色々に変えて。i：虚数単位）、三角関数と双曲線関数における虚数乗法とでもいうべき $\tanh^{-1}(ix)=i\cdot\tan^{-1}(x)$ を適用したりして、一つ上の一連の式は得られた。

● このように①は三変数なので、変化させられる<u>パラメータが多く</u>、そしてこのような母等式は他にも多くあるので、三角関数と双曲線関数の融合域における三変数域は、想像を絶する巨大領域となっている。ここは、１９世紀数学で見落とされた領域であるような気がする。１９世紀はアーベル、ヤコビ、ルジャンドル、ガウス、クロネッカーらの影響もあってみな楕円関数の方に流れていった。

●ζ(3)式も眺めたい。こちらも規則がわかるように順番を並べ替えた。また茶色の所は 2 だがあえてそのように表現した。

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{16a^2}{3}\log\left((1+e^{a})(1+e^{-a})^2(1+e^{-3a})^3(1+e^{-5a})^4\cdot\cdot\right)$$ ---<S6−23>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{16a^2}{3}\log\left((1+e^{0a})(1+e^{-2a})^2(1+e^{-4a})^3(1+e^{-6a})^4\cdot\cdot\right)$$ ---<S6−22>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{16a^2}{3}\log\left((1+e^{-a})(1+e^{-3a})^2(1+e^{-5a})^3(1+e^{-7a})^4\cdot\cdot\right)$$ ---<S6−20>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{16a^2}{3}\log\left((1+e^{-2a})(1+e^{-4a})^2(1+e^{-6a})^3(1+e^{-8a})^4\cdot\cdot\right)$$ ---＜S6−8＞

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{16a^2}{3}\log\left((1+e^{-3a})(1+e^{-5a})^2(1+e^{-7a})^3(1+e^{-9a})^4\cdot\cdot\right)$$ ---＜S6−21＞

　こちらもきれいな規則でもって上へ下へと延びていく。

＝＝

2025.5.3 杉岡幹生

＜参考文献＞

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」（Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社）

・「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）