＜ 三角関数と双曲線関数の融合域（その３２）＞

新たに極限公式が三つ得られたので下方に青色式で示す。これまでの式と一緒に示した。

なお、L(2)はL(2)＝1 $-1/3^2+1/5^2-1/7^2$ +-・・である（カタランの定数）。
ζ(3)はζ(3)＝1 $+1/2^3+1/3^3+1/4^3$ +・である。
π/4 はL(1)そのものである。$\pi^2/6$ はζ(2)、$\pi^2/8$ は(3/4)ζ(2)である。
L(3)はL(3)＝1 $-1/3^3+1/5^3-1/7^3$ +-・・＝$\pi^3/32$ である。

以下では、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。a は任意の実数である。$\tan^{-1}$, th^{-1} はそれぞれ arctan, arctanh である。log は自然対数、e は自然対数の底。
なお、sin, cos, tan は通常の表記である。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜ 極限公式 ＞

◆$2^{1/2}$ ／$2^{1/4}$ ／2^{-1}／2^2 極限公式

$$\sqrt{2}=\lim_{a\to+0}(1+e^{-a})(1+e^{-3a})^{-1}(1+e^{-5a})(1+e^{-7a})^{-1}(1+e^{-9a})(1+e^{-11a})^{-1}\cdot\cdot$$ ---＜N1-2＞

$$\sqrt{2}=\lim_{a\to+0}(1+e^{-a})(1+e^{-2a})^{-1}(1+e^{-3a})(1+e^{-4a})^{-1}(1+e^{-5a})(1+e^{-6a})^{-1}\cdot\cdot$$ ---＜P1-4＞

$$2^{1/4}=\lim_{a\to+0}(1+e^{-a})(1+e^{-2a})^{-2}(1+e^{-3a})^{3}(1+e^{-4a})^{-4}(1+e^{-5a})^{5}(1+e^{-6a})^{-6}\cdot\cdot$$ ---＜R2＞

$$\frac{1}{2}=\lim_{a\to\pm0}\sin a\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a+cos2a}}+\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch4a+cos2a}}+\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch6a+cos2a}}+\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch8a+cos2a}}+\cdot\cdot\right)$$ --＜O1－1＞

$$\frac{1}{2}=\lim_{a\to+0}\frac{\sin a}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{cha+cos\,a}}+\frac{1}{\mathrm{ch2a+cos\,a}}+\frac{1}{\mathrm{ch3a+cos\,a}}+\frac{1}{\mathrm{ch4a+cos\,a}}+\cdot\cdot\right)$$ ---＜O1－2＞

$$4=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{cha+sin\,a}}{\mathrm{cha-sin\,a}}\right)^{e^{-a}}\left(\frac{\mathrm{ch2a+sin\,a}}{\mathrm{ch2a-sin\,a}}\right)^{e^{-2a}}\left(\frac{\mathrm{ch3a+sin\,a}}{\mathrm{ch3a-sin\,a}}\right)^{e^{-3a}}\left(\frac{\mathrm{ch4a+sin\,a}}{\mathrm{ch4a-sin\,a}}\right)^{e^{-4a}}\cdot\cdot$$ --＜Q1＞

◆L(2)極限公式

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}\mathrm{sha}\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sha}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh3a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh5a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh7a}}\right)+\cdot\cdot\right)$$ ---＜S1＞

$$L(2)=\lim_{a\to\pm 0} sh^2a\left(\frac{2}{ch2a}+\frac{4}{ch4a}+\frac{6}{ch6a}+\frac{8}{ch8a}+\cdot\cdot\right)$$ ----＜S1−2＞

$$L(2)=\lim_{a\to\pm 0} sh^2a\left(\frac{1}{cha}+\frac{3}{ch3a}+\frac{5}{ch5a}+\frac{7}{ch7a}+\cdot\cdot\right)$$ ----＜S1−3＞

$$L(2)=\lim_{a\to\pm 0} sha\left(\tan^{-1}\left(\frac{cha}{sha}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{cha}{sh3a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{cha}{sh5a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{cha}{sh7a}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --＜S1−4＞

◆$\frac{\pi^2}{8}$極限公式　(3ζ(2)/4 極限公式)

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}(e^a-1)\log\left(\frac{1}{tha\cdot th2a\cdot th3a\cdot th4a\cdots}\right)$$ ----＜S2−1＞

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} sh2a\cdot\log\left(\frac{1}{tha\cdot th3a\cdot th5a\cdot th7a\cdots}\right)$$ ----＜S2−2＞

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} sh^2a\left(\frac{2}{sh2a}+\frac{4}{sh4a}+\frac{6}{sh6a}+\frac{8}{sh8a}+\cdot\cdot\right)$$ ----＜S2−3＞

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} sh^2a\left(\frac{1}{sha}+\frac{3}{sh3a}+\frac{5}{sh5a}+\frac{7}{sh7a}+\cdot\cdot\right)$$ ----＜S2−4＞

◆$\frac{\pi^2}{6}$極限公式（ζ(2)極限公式）

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}(1-e^a)\log\left((1-e^{-a})(1-e^{-2a})(1-e^{-3a})(1-e^{-4a})\cdot\cdot\right)$$ ----＜S3＞

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2sh^3a\left(\frac{1^2}{ch^2a}+\frac{2^2}{ch^22a}+\frac{3^2}{ch^23a}+\frac{4^2}{ch^24a}+\cdot\cdot\right)$$ ---＜S3−2＞

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} sh^3a\left(\frac{1^2}{sh^2a}+\frac{2^2}{sh^22a}+\frac{3^2}{sh^23a}+\frac{4^2}{sh^24a}+\cdot\cdot\right)$$ ---＜S3−3＞

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 4sh^2a\left(\frac{1}{e^a+1}+\frac{3}{e^{3a}+1}+\frac{5}{e^{5a}+1}+\frac{7}{e^{7a}+1}+\cdot\cdot\right)$$ ----＜S3−4＞

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2sh^2a\left(\frac{1}{e^a-1}+\frac{3}{e^{3a}-1}+\frac{5}{e^{5a}-1}+\frac{7}{e^{7a}-1}+\cdot\cdot\right)$$ ----＜S3−5＞

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}4\mathrm{sh}^2a\left(\frac{1}{e^{2a}-1}+\frac{2}{e^{4a}-1}+\frac{3}{e^{6a}-1}+\frac{4}{e^{8a}-1}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S3−6>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}4\mathrm{sh}^3a\left(\frac{1^2}{\mathrm{ch}^2a}+\frac{3^2}{\mathrm{ch}^23a}+\frac{5^2}{\mathrm{ch}^25a}+\frac{7^2}{\mathrm{ch}^27a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S3−7>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}2\mathrm{sh}^3a\left(\frac{1^2}{\mathrm{sh}^2a}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}^23a}+\frac{5^2}{\mathrm{sh}^25a}+\frac{7^2}{\mathrm{sh}^27a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S3−8>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}4(\mathrm{ch}a-1)\left(\frac{1}{e^{a}+1}+\frac{2}{e^{2a}+1}+\frac{3}{e^{3a}+1}+\frac{4}{e^{4a}+1}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S3−9>

◆$\frac{\pi}{4}$極限公式　(L(1)極限公式)

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}\frac{(e^a-1)}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}a}+\frac{1}{\mathrm{ch}2a}+\frac{1}{\mathrm{ch}3a}+\frac{1}{\mathrm{ch}4a}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S4−1>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}a\left(\frac{1}{\mathrm{ch}a}+\frac{1}{\mathrm{ch}3a}+\frac{1}{\mathrm{ch}5a}+\frac{1}{\mathrm{ch}7a}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S4−2>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}^2a\left(\frac{2\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}^22a}+\frac{4\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}^24a}+\frac{6\mathrm{sh}6a}{\mathrm{ch}^26a}+\frac{8\mathrm{sh}8a}{\mathrm{ch}^28a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S4−3>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}2\mathrm{sh}a\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}5a}{\mathrm{ch}10a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}7a}{\mathrm{ch}14a+\mathrm{ch}a}+\cdot\cdot\right)$$ --<S4−4>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}2\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}2a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}6a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}10a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}14a}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --<S4−5>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}a}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}3a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}5a}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}7a}\right)+-\cdot\cdot\right)$$ --<S4−6>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}4\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}4a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}12a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}20a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}28a}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --<S4−7>

◆log2 極限公式

$$\log 2=\lim_{a\to+0}(e^a-1)\left(\frac{1}{e^{a}+1}+\frac{1}{e^{2a}+1}+\frac{1}{e^{3a}+1}+\frac{1}{e^{4a}+1}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S5−1>

$$\log 2 = \lim_{a \to +0} 2(e^{a} - 1)\left(\frac{1}{e^{a}+1} + \frac{1}{e^{3a}+1} + \frac{1}{e^{5a}+1} + \frac{1}{e^{7a}+1} + \cdot\ \cdot\right) \qquad \text{----}<S5-2>$$

$$\log 2 = \lim_{a \to \pm 0} 2\mathrm{sh}^{2}a\left(\frac{1}{\mathrm{ch}^{2}a} + \frac{3}{\mathrm{ch}^{2}3a} + \frac{5}{\mathrm{ch}^{2}5a} + \frac{7}{\mathrm{ch}^{2}7a} + \cdot\ \cdot\right) \qquad \text{---}<S5-3>$$

$$\log 2 = \lim_{a \to \pm 0} \mathrm{sh}^{2}a\left(\frac{1}{\mathrm{ch}^{2}a} + \frac{2}{\mathrm{ch}^{2}2a} + \frac{3}{\mathrm{ch}^{2}3a} + \frac{4}{\mathrm{ch}^{2}4a} + \cdot\ \cdot\right) \qquad \text{---}<S5-4>$$

$$\log 2 = \lim_{a \to +0} 2\mathrm{sha}\left(\mathrm{sha} \cdot \log\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sha}}\right) + \mathrm{sh}3a \cdot \log\left(\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{sh}3a}\right) + \mathrm{sh}5a \cdot \log\left(\frac{\mathrm{ch}5a}{\mathrm{sh}5a}\right) + \cdot\ \cdot\right) \qquad \text{---}<S5-5>$$

$$\log 2 = \lim_{a \to +0} (e^{a} - 1)\left(\mathrm{sha} \cdot \log\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sha}}\right) + \mathrm{sh}2a \cdot \log\left(\frac{\mathrm{ch}2a}{\mathrm{sh}2a}\right) + \mathrm{sh}3a \cdot \log\left(\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{sh}3a}\right) + \cdot\ \cdot\right) \qquad \text{--}<S5-6>$$

◆ζ(3)極限公式

$$\zeta(3) = \lim_{a \to +0} \frac{16(e^{a}-1)^{2}}{7} \log\left(\frac{1}{\mathrm{th}2a \cdot \mathrm{th}^{2}3a \cdot \mathrm{th}^{3}4a \cdot \mathrm{th}^{4}5a \cdots}\right) \qquad \text{---}<S6-1>$$

$$\zeta(3) = \lim_{a \to \pm 0} \frac{8\mathrm{sh}^{4}a}{9}\left(\frac{2^{3}-2}{\mathrm{ch}^{2}2a} + \frac{3^{3}-3}{\mathrm{ch}^{2}3a} + \frac{4^{3}-4}{\mathrm{ch}^{2}4a} + \frac{5^{3}-5}{\mathrm{ch}^{2}5a} + \cdot\ \cdot\right) \qquad \text{---}<S6-2>$$

$$\zeta(3) = \lim_{a \to \pm 0} \frac{2\mathrm{sh}^{4}a}{3}\left(\frac{2^{3}-2}{\mathrm{sh}^{2}2a} + \frac{3^{3}-3}{\mathrm{sh}^{2}3a} + \frac{4^{3}-4}{\mathrm{sh}^{2}4a} + \frac{5^{3}-5}{\mathrm{sh}^{2}5a} + \cdot\ \cdot\right) \qquad \text{---}<S6-3>$$

$$\zeta(3) = \lim_{a \to \pm 0} \frac{16\mathrm{sh}^{3}a}{7}\left(\frac{1^{2}}{\mathrm{sh}2a} + \frac{2^{2}}{\mathrm{sh}4a} + \frac{3^{2}}{\mathrm{sh}6a} + \frac{4^{2}}{\mathrm{sh}8a} + \cdot\ \cdot\right) \qquad \text{----}<S6-4>$$

$$\zeta(3) = \lim_{a \to +0} \frac{16\mathrm{sh}^{3}a}{3}\left(\frac{1^{2}}{e^{2a}+1} + \frac{2^{2}}{e^{4a}+1} + \frac{3^{2}}{e^{6a}+1} + \frac{4^{2}}{e^{8a}+1} + \cdot\ \cdot\right) \qquad \text{----}<S6-5>$$

$$\zeta(3) = \lim_{a \to +0} \frac{8\mathrm{sh}^{2}a}{3} \log\left((1 + e^{-a})(1 + e^{-3a})^{3}(1 + e^{-5a})^{5}(1 + e^{-7a})^{7} \cdot\ \cdot\right) \qquad \text{---}<S6-6>$$

$$\zeta(3) = \lim_{a \to +0} 4\mathrm{sh}^{2}a \cdot \log\left(\frac{1}{(1-e^{-2a})(1-e^{-4a})^{2}(1-e^{-6a})^{3}(1-e^{-8a})^{4} \cdot\ \cdot}\right) \qquad \text{---}<S6-7>$$

$$\zeta(3) = \lim_{a \to +0} \frac{16\mathrm{sh}^{2}a}{3} \log\left((1 + e^{-2a})(1 + e^{-4a})^{2}(1 + e^{-6a})^{3}(1 + e^{-8a})^{4} \cdot\ \cdot\right) \qquad \text{---}<S6-8>$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0} 2\mathrm{sh}^2 a\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-3a})^3(1-e^{-5a})^5(1-e^{-7a})^7\cdot\cdot}\right)$$ ---<S6−9>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{4\mathrm{sh}^3 a}{3}\left(\frac{1^2}{e^a+1}+\frac{3^2}{e^{3a}+1}+\frac{5^2}{e^{5a}+1}+\frac{7^2}{e^{7a}+1}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S6−10>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}^3 a\left(\frac{1^2}{e^a-1}+\frac{3^2}{e^{3a}-1}+\frac{5^2}{e^{5a}-1}+\frac{7^2}{e^{7a}-1}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S6−11>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm0}\frac{4\mathrm{sh}^3 a}{7}\left(\frac{1^2}{\mathrm{sh}a}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}3a}+\frac{5^2}{\mathrm{sh}5a}+\frac{7^2}{\mathrm{sh}7a}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S6−12>

◆ $\frac{\pi^3}{32}$極限公式　(L(3)極限公式)

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0} 2\mathrm{sh}^3 a\left(\frac{1^2}{\mathrm{ch}2a}+\frac{2^2}{\mathrm{ch}4a}+\frac{3^2}{\mathrm{ch}6a}+\frac{4^2}{\mathrm{ch}8a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S7−1>

◆ e^{π}極限公式

$$e^{\pi}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin a}{\mathrm{ch}a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\sin a}{\mathrm{ch}2a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin a}{\mathrm{ch}3a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\sin a}{\mathrm{ch}4a-\sin a}\right)\cdot\cdot$$ --<S8−1>

$$e^{\pi}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin a}{\mathrm{ch}a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin a}{\mathrm{ch}3a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}5a+\sin a}{\mathrm{ch}5a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}7a+\sin a}{\mathrm{ch}7a-\sin a}\right)^2\cdot\cdot$$ --<S8−2>

◆ $e^{\pi x}$[恒等]極限公式

$$e^{\pi x}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin ax}{\mathrm{ch}a-\sin ax}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\sin ax}{\mathrm{ch}2a-\sin ax}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin ax}{\mathrm{ch}3a-\sin ax}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\sin ax}{\mathrm{ch}4a-\sin ax}\right)\cdot\cdot$$ --<S8−1−2>

x は任意の実数

$$e^{\pi x}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin ax}{\mathrm{ch}a-\sin ax}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin ax}{\mathrm{ch}3a-\sin ax}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}5a+\sin ax}{\mathrm{ch}5a-\sin ax}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}7a+\sin ax}{\mathrm{ch}7a-\sin ax}\right)^2\cdot\cdot$$ --<S8−2−2>

x は任意の実数

==================================

今回は三つの青色式が得られた。Wolfram Alpha の数値検証でも式の成立を確認している。

なお、lim での a->+0 は a をプラス側から 0 に近づける意味、a->±0 は a をプラス側、マイナス側どちらから 0 に近づけてもＯＫの意味である

ここで、今回の三式を並べよう。

$$4=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin a}{\mathrm{ch}a-\sin a}\right)^{e^{-a}}\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\sin a}{\mathrm{ch}2a-\sin a}\right)^{e^{-2a}}\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin a}{\mathrm{ch}3a-\sin a}\right)^{e^{-3a}}\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\sin a}{\mathrm{ch}4a-\sin a}\right)^{e^{-4a}}\cdots \quad \text{--<Q1>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}4(\mathrm{ch}a-1)\left(\frac{1}{e^{a}+1}+\frac{2}{e^{2a}+1}+\frac{3}{e^{3a}+1}+\frac{4}{e^{4a}+1}+\cdots\right) \quad \text{----<S3-9>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm0}\frac{4\mathrm{sh}^3a}{7}\left(\frac{1^2}{\mathrm{sh}a}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}3a}+\frac{5^2}{\mathrm{sh}5a}+\frac{7^2}{\mathrm{sh}7a}+\cdots\right) \quad \text{----<S6-12>}$$

これらの中で右辺が無限積の＜Ｑ１＞に関して、その左辺は 4 であり、これはつまらない数だ！と思われるかもしれない。しかし式の導出過程で、この 4（つまり 2^2）は log2 の 2 から来ており、log2 は

log2＝1 −1/2 +1/3 −1/4 +−・・

であって、それはζ(s)の極ζ(1)の化身の意味をもっている。それを知れば＜Ｑ１＞は興味ある式である。

したがって、上式３式はすべてζ(s)関連の式といえる。

今回の式の中から＜Ｑ１＞の証明を以下に示す。詳細な式変形はとばした。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜Q1＞の証明

下式[1]の左辺から出発する。それに対し、１３年前のこちらの 2012/8/16 の[導出]と類似的な方法を使って変形していき[1]右辺に到達する。途中でゼータの香りの漂う・・（その３０７）での深フーリエ級数[7]を使う（注意：フーリエ級数の表現を使っているが、それらは恒等式である。x に制限を加えているが、じつは x は任意の実数である）。この[1]は二変数の恒等式となっている。

$$\left(\frac{1}{e^{a}}\right)\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{ch}a}\right)+\left(\frac{1}{e^{2a}}\right)\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{ch}2a}\right)+\left(\frac{1}{e^{3a}}\right)\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{ch}3a}\right)+\left(\frac{1}{e^{4a}}\right)\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{ch}4a}\right)+\cdots$$
$$=2\left(\frac{\cos x}{e^{2a}-1}+\frac{\cos 3x}{3(e^{4a}-1)}+\frac{\cos 5x}{5(e^{6a}-1)}+\frac{\cos 7x}{3(e^{8a}-1)}+\cdots\right) \quad \text{----[1]}$$
$$(a>0,\ x\text{ は任意実数})$$

上式で x をπ/2−x で置き換えてから、x を a に置き換え、さらに公式 $\mathrm{th}^{-1}(b/a)=(1/2)\log\{(a+b)/(a-b)\}$ を使って変形すると、次となる。

$$\left(\frac{1}{e^{a}}\right)\log\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin a}{\mathrm{ch}a-\sin a}\right)+\left(\frac{1}{e^{2a}}\right)\log\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\sin a}{\mathrm{ch}2a-\sin a}\right)+\left(\frac{1}{e^{3a}}\right)\log\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin a}{\mathrm{ch}3a-\sin a}\right)+\left(\frac{1}{e^{4a}}\right)\log\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\sin a}{\mathrm{ch}4a-\sin a}\right)+\cdot$$

$$=4\left(\frac{\sin a}{e^{2a}-1}-\frac{\sin 3a}{3(e^{4a}-1)}+\frac{\sin 5a}{5(e^{6a}-1)}-\frac{\sin 7a}{3(e^{8a}-1)}+-\cdot\cdot\right) \quad \text{----[2]}$$

$$(a>0)$$

上式で a を（＋側から）0 に近づけていく(a->＋0)。右辺の各項は 0/0 となるから、それぞれの項に対してロピタルの定理を適用して右辺は 2log2 となる。左辺と右辺を逆にして少しの式変形の後、目標の＜Ｑ１＞に到達する。

$$4=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin a}{\mathrm{ch}a-\sin a}\right)^{e^{-a}}\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\sin a}{\mathrm{ch}2a-\sin a}\right)^{e^{-2a}}\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin a}{\mathrm{ch}3a-\sin a}\right)^{e^{-3a}}\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\sin a}{\mathrm{ch}4a-\sin a}\right)^{e^{-4a}}\cdot\cdot \quad \text{--<Q1>}$$

終わり。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜Ｑ１＞はこのようにして得られた。下線の x を a に置き換えた操作は哲学的に深い意味を含んでいることはこれまで述べてきた通りである。なお、今回の他の二式はこれまでの方法と類似の方法で得られる。

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● ζ(s)の化身の意味をもう少し述べる。ζ(s)では次の変形をよく行う。

$1-1/2^s+1/3^s-1/4^s+1/5^s-1/6^s+-\cdot\cdot$

$=(1+1/2^s+1/3^s+1/4^s+1/5^s+1/6^s+\cdot\cdot)\ -2(1/2^s+1/4^s+1/6^s+\cdot\cdot)$

$=\zeta(s)\ -2(1/2^s)(1^s+1/2^s+1/3^s+\cdot\cdot)$

$=\zeta(s)\ -1/2^{s-1}\zeta(s)$

$=(1-1/2^{s-1})\zeta(s)$

すなわち、$1-1/2^s+1/3^s-1/4^s+1/5^s-1/6^s+-\cdot\cdot=(1-1/2^{s-1})\zeta(s)$ ---①

ここで、s を 2 とすると、①より

$1-1/2^2+1/3^2-1/4^2+1/5^2-1/6^2+-\cdot\cdot=(1-1/2^{2-1})\zeta(2)=\zeta(2)/2$

これは OK である。

次に s が 1 の場合はどうか。①で s を 1 とすると、

$1-1/2+1/3-1/4+1/5-1/6+-\cdot\cdot=(1-1/2^{1-1})\zeta(1)$ ---②

つまり、log2＝0×∞

となって意味をなさないのだが、しかしゼータの本心はこうなのである（②を成立させたい！）。このようなことから、log2 は極ζ(1)の化身と思われ、それはζ(1)が現実界に降りてきた姿と考えられる。

● ＜Ｑ１＞と＜Ｓ８－１＞を並べよう。

$$4=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin a}{\mathrm{ch}a-\sin a}\right)^{e^{-a}}\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\sin a}{\mathrm{ch}2a-\sin a}\right)^{e^{-2a}}\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin a}{\mathrm{ch}3a-\sin a}\right)^{e^{-3a}}\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\sin a}{\mathrm{ch}4a-\sin a}\right)^{e^{-4a}}\cdots \quad \text{--}\langle Q1\rangle$$

$$e^{\pi}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin a}{\mathrm{ch}a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\sin a}{\mathrm{ch}2a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin a}{\mathrm{ch}3a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\sin a}{\mathrm{ch}4a-\sin a}\right)\cdots \quad \text{--}\langle S8-1\rangle$$

この両者は似た形をしていて面白い。

＜Ｑ１＞の左辺の 4 は、極ζ(1)の化身 log2 の 2 から来ていることは述べた。

＜Ｓ８－１＞の左辺のπは、これはπ/4=L(1)＝1-1/3+1/5-1/7+-・・から来ている。
すなわち、前者はζ(s)の心をもち、後者はL(s)の心を宿している。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2025.2.15 杉岡幹生

＜参考文献＞

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)

・「数学公式Ⅱ」(森口・宇田川・一松、岩波書店)