＜ 三角関数と双曲線関数の融合域（その３１）＞

新たに極限公式が九つ得られたので下方に青色式で示す。これまでの式と一緒に示した。今回はじめて恒等式の極限公式が得られた。

なお、L(2)はL(2)＝1 $-1/3^2+1/5^2-1/7^2+-\cdot\cdot$である（カタランの定数）。
ζ(3)はζ(3)＝1 $+1/2^3+1/3^3+1/4^3+\cdot$である。
$\pi/4$ はL(1)そのものである。$\pi^2/6$ はζ(2)、$\pi^2/8$ は(3/4)ζ(2)である。
L(3)はL(3)＝1 $-1/3^3+1/5^3-1/7^3+-\cdot\cdot=\pi^3/32$ である。

以下では、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。a は任意の実数である。$\tan^{-1}$, th^{-1} はそれぞれ arctan, arctanh である。log は自然対数、e は自然対数の底。
なお、sin, cos, tan は通常の表記である。

＝＝

＜ 極限公式 ＞

◆$2^{1/2}$ ／$2^{1/4}$ ／2^{-1} 極限公式

$$\sqrt{2}=\lim_{a\to+0}(1+e^{-a})(1+e^{-3a})^{-1}(1+e^{-5a})(1+e^{-7a})^{-1}(1+e^{-9a})(1+e^{-11a})^{-1}\cdot\cdot \quad \text{---<N1-2>}$$

$$\sqrt{2}=\lim_{a\to+0}(1+e^{-a})(1+e^{-2a})^{-1}(1+e^{-3a})(1+e^{-4a})^{-1}(1+e^{-5a})(1+e^{-6a})^{-1}\cdot\cdot \quad \text{---<P1-4>}$$

$$2^{1/4}=\lim_{a\to+0}(1+e^{-a})(1+e^{-2a})^{-2}(1+e^{-3a})^{3}(1+e^{-4a})^{-4}(1+e^{-5a})^{5}(1+e^{-6a})^{-6}\cdot\cdot \quad \text{---<R2>}$$

$$\frac{1}{2}=\lim_{a\to\pm0}\sin a\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a+cos2a}}+\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch4a+cos2a}}+\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch6a+cos2a}}+\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch8a+cos2a}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{--<O1-1>}$$

$$\frac{1}{2}=\lim_{a\to+0}\frac{\sin a}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{cha}+\cos a}+\frac{1}{\mathrm{ch2a}+\cos a}+\frac{1}{\mathrm{ch3a}+\cos a}+\frac{1}{\mathrm{ch4a}+\cos a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---<O1-2>}$$

◆L(2)極限公式

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}\mathrm{sha}\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sha}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh3a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh5a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh7a}}\right)+\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S1>}$$

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}\mathrm{sh}^2\mathrm{a}\left(\frac{2}{\mathrm{ch2a}}+\frac{4}{\mathrm{ch4a}}+\frac{6}{\mathrm{ch6a}}+\frac{8}{\mathrm{ch8a}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S1-2>}$$

$$L(2)=\lim_{a\to\pm 0} \mathrm{sh}^2 a\left(\frac{1}{\mathrm{ch}a}+\frac{3}{\mathrm{ch}3a}+\frac{5}{\mathrm{ch}5a}+\frac{7}{\mathrm{ch}7a}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S1−3>

$$L(2)=\lim_{a\to\pm 0} \mathrm{sh}a\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}3a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}5a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}7a}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --<S1−4>

◆$\frac{\pi^2}{8}$極限公式　（3ζ（2）/4 極限公式）

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}(e^a-1)\log\left(\frac{1}{\mathrm{th}a\cdot\mathrm{th}2a\cdot\mathrm{th}3a\cdot\mathrm{th}4a\cdots}\right)$$ ----<S2−1>

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}2a\cdot\log\left(\frac{1}{\mathrm{th}a\cdot\mathrm{th}3a\cdot\mathrm{th}5a\cdot\mathrm{th}7a\cdots}\right)$$ ----<S2−2>

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}^2 a\left(\frac{2}{\mathrm{sh}2a}+\frac{4}{\mathrm{sh}4a}+\frac{6}{\mathrm{sh}6a}+\frac{8}{\mathrm{sh}8a}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S2−3>

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}^2 a\left(\frac{1}{\mathrm{sh}a}+\frac{3}{\mathrm{sh}3a}+\frac{5}{\mathrm{sh}5a}+\frac{7}{\mathrm{sh}7a}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S2−4>

◆$\frac{\pi^2}{6}$極限公式（ζ（2）極限公式）

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}(1-e^a)\log\left((1-e^{-a})(1-e^{-2a})(1-e^{-3a})(1-e^{-4a})\cdot\cdot\right)$$ ----<S3>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}2\mathrm{sh}^3 a\left(\frac{1^2}{\mathrm{ch}^2 a}+\frac{2^2}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{3^2}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{4^2}{\mathrm{ch}^2 4a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S3−2>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}^3 a\left(\frac{1^2}{\mathrm{sh}^2 a}+\frac{2^2}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{4^2}{\mathrm{sh}^2 4a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S3−3>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}4\mathrm{sh}^2 a\left(\frac{1}{e^a+1}+\frac{3}{e^{3a}+1}+\frac{5}{e^{5a}+1}+\frac{7}{e^{7a}+1}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S3−4>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}2\mathrm{sh}^2 a\left(\frac{1}{e^a-1}+\frac{3}{e^{3a}-1}+\frac{5}{e^{5a}-1}+\frac{7}{e^{7a}-1}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S3−5>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}4\mathrm{sh}^2 a\left(\frac{1}{e^{2a}-1}+\frac{2}{e^{4a}-1}+\frac{3}{e^{6a}-1}+\frac{4}{e^{8a}-1}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S3−6>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 4\mathrm{sh}^3a\left(\frac{1^2}{\mathrm{ch}^2a}+\frac{3^2}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{5^2}{\mathrm{ch}^2 5a}+\frac{7^2}{\mathrm{ch}^2 7a}+\cdot\cdot\right)$$
---<S3−7>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2\mathrm{sh}^3a\left(\frac{1^2}{\mathrm{sh}^2a}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{5^2}{\mathrm{sh}^2 5a}+\frac{7^2}{\mathrm{sh}^2 7a}+\cdot\cdot\right)$$
---<S3−8>

◆$\frac{\pi}{4}$極限公式　(L (1) 極限公式)

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}\frac{(e^a-1)}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch2a}}+\frac{1}{\mathrm{ch3a}}+\frac{1}{\mathrm{ch4a}}+\cdot\cdot\right)$$
----<S4−1>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}\mathrm{sha}\left(\frac{1}{\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch3a}}+\frac{1}{\mathrm{ch5a}}+\frac{1}{\mathrm{ch7a}}+\cdot\cdot\right)$$
----<S4−2>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}^2a\left(\frac{2\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{4\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}^2 4a}+\frac{6\mathrm{sh}6a}{\mathrm{ch}^2 6a}+\frac{8\mathrm{sh}8a}{\mathrm{ch}^2 8a}+\cdot\cdot\right)$$
---<S4−3>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} 2\mathrm{sha}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch5a}}{\mathrm{ch10a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch7a}}{\mathrm{ch14a}+\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right)$$
--<S4−4>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} 2\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch6a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch10a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch14a}}\right)+\cdot\cdot\right)$$
--<S4−5>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sha}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh3a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh5a}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh7a}}\right)+-\cdot\cdot\right)$$
--<S4−6>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} 4\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch4a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch12a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch20a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch28a}}\right)+\cdot\cdot\right)$$
--<S4−7>

◆log2 極限公式

$$\log 2=\lim_{a\to+0}(e^a-1)\left(\frac{1}{e^a+1}+\frac{1}{e^{2a}+1}+\frac{1}{e^{3a}+1}+\frac{1}{e^{4a}+1}+\cdot\cdot\right)$$
----<S5−1>

$$\log 2=\lim_{a\to+0} 2(e^a-1)\left(\frac{1}{e^a+1}+\frac{1}{e^{3a}+1}+\frac{1}{e^{5a}+1}+\frac{1}{e^{7a}+1}+\cdot\cdot\right)$$
----<S5−2>

$$\log 2=\lim_{a\to\pm0} 2\mathrm{sh}^2a\left(\frac{1}{\mathrm{ch}^2a}+\frac{3}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{5}{\mathrm{ch}^2 5a}+\frac{7}{\mathrm{ch}^2 7a}+\cdot\cdot\right)$$
---<S5−3>

$$\log 2=\lim_{a\to\pm 0} sh^2 a\left(\frac{1}{ch^2 a}+\frac{2}{ch^2 2a}+\frac{3}{ch^2 3a}+\frac{4}{ch^2 4a}+\cdot\ \cdot\right) \qquad \text{---}<S5-4>$$

$$\log 2=\lim_{a\to +0} 2sha\left(sha\cdot\log\left(\frac{cha}{sha}\right)+sh3a\cdot\log\left(\frac{ch3a}{sh3a}\right)+sh5a\cdot\log\left(\frac{ch5a}{sh5a}\right)+\cdot\ \cdot\right) \qquad \text{---}<S5-5>$$

$$\log 2=\lim_{a\to +0} (e^a-1)\left(sha\cdot\log\left(\frac{cha}{sha}\right)+sh2a\cdot\log\left(\frac{ch2a}{sh2a}\right)+sh3a\cdot\log\left(\frac{ch3a}{sh3a}\right)+\cdot\ \cdot\right) \qquad \text{--}<S5-6>$$

◆ζ(3)極限公式

$$\zeta(3)=\lim_{a\to +0}\frac{16(e^a-1)^2}{7}\log\left(\frac{1}{th2a\cdot th^2 3a\cdot th^3 4a\cdot th^4 5a\cdots}\right) \qquad \text{---}<S6-1>$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm 0}\frac{8sh^4 a}{9}\left(\frac{2^3-2}{ch^2 2a}+\frac{3^3-3}{ch^2 3a}+\frac{4^3-4}{ch^2 4a}+\frac{5^3-5}{ch^2 5a}+\cdot\ \cdot\right) \qquad \text{---}<S6-2>$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm 0}\frac{2sh^4 a}{3}\left(\frac{2^3-2}{sh^2 2a}+\frac{3^3-3}{sh^2 3a}+\frac{4^3-4}{sh^2 4a}+\frac{5^3-5}{sh^2 5a}+\cdot\ \cdot\right) \qquad \text{---}<S6-3>$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm 0}\frac{16sh^3 a}{7}\left(\frac{1^2}{sh2a}+\frac{2^2}{sh4a}+\frac{3^2}{sh6a}+\frac{4^2}{sh8a}+\cdot\ \cdot\right) \qquad \text{----}<S6-4>$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\to +0}\frac{16sh^3 a}{3}\left(\frac{1^2}{e^{2a}+1}+\frac{2^2}{e^{4a}+1}+\frac{3^2}{e^{6a}+1}+\frac{4^2}{e^{8a}+1}+\cdot\ \cdot\right) \qquad \text{----}<S6-5>$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\to +0}\frac{8sh^2 a}{3}\log\left((1+e^{-a})(1+e^{-3a})^3(1+e^{-5a})^5(1+e^{-7a})^7\cdot\ \cdot\right) \qquad \text{---}<S6-6>$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\to +0} 4sh^2 a\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-2a})(1-e^{-4a})^2(1-e^{-6a})^3(1-e^{-8a})^4\cdot\ \cdot}\right) \qquad \text{---}<S6-7>$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\to +0}\frac{16sh^2 a}{3}\log\left((1+e^{-2a})(1+e^{-4a})^2(1+e^{-6a})^3(1+e^{-8a})^4\cdot\ \cdot\right) \qquad \text{---}<S6-8>$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\to +0} 2sh^2 a\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-3a})^3(1-e^{-5a})^5(1-e^{-7a})^7\cdot\ \cdot}\right) \qquad \text{---}<S6-9>$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\to +0}\frac{4sh^3 a}{3}\left(\frac{1^2}{e^a+1}+\frac{3^2}{e^{3a}+1}+\frac{5^2}{e^{5a}+1}+\frac{7^2}{e^{7a}+1}+\cdot\ \cdot\right) \qquad \text{----}<S6-10>$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0} \mathrm{sh}^3 a\left(\frac{1^2}{e^{a}-1}+\frac{3^2}{e^{3a}-1}+\frac{5^2}{e^{5a}-1}+\frac{7^2}{e^{7a}-1}+\cdot\cdot\right) \qquad ----<S6-11>$$

◆ $\frac{\pi^3}{32}$極限公式　(L(3)極限公式)

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0} 2\mathrm{sh}^3 a\left(\frac{1^2}{\mathrm{ch}2a}+\frac{2^2}{\mathrm{ch}4a}+\frac{3^2}{\mathrm{ch}6a}+\frac{4^2}{\mathrm{ch}8a}+\cdot\cdot\right) \qquad ---<S7-1>$$

◆ e^{π}極限公式

$$e^{\pi}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin a}{\mathrm{ch}a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\sin a}{\mathrm{ch}2a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin a}{\mathrm{ch}3a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\sin a}{\mathrm{ch}4a-\sin a}\right)\cdot\cdot \quad --<S8-1>$$

$$e^{\pi}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin a}{\mathrm{ch}a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin a}{\mathrm{ch}3a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}5a+\sin a}{\mathrm{ch}5a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}7a+\sin a}{\mathrm{ch}7a-\sin a}\right)^2\cdot\cdot \quad --<S8-2>$$

◆ $e^{\pi x}$[恒等]極限公式

$$e^{\pi x}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin ax}{\mathrm{ch}a-\sin ax}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\sin ax}{\mathrm{ch}2a-\sin ax}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin ax}{\mathrm{ch}3a-\sin ax}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\sin ax}{\mathrm{ch}4a-\sin ax}\right)\cdot\cdot \quad --<S8-1-2>$$

x は任意の実数

$$e^{\pi x}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin ax}{\mathrm{ch}a-\sin ax}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin ax}{\mathrm{ch}3a-\sin ax}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}5a+\sin ax}{\mathrm{ch}5a-\sin ax}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}7a+\sin ax}{\mathrm{ch}7a-\sin ax}\right)^2\cdot\cdot \quad --<S8-2-2>$$

x は任意の実数

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

今回は九つの青色式が得られた。Wolfram Alpha の数値検証でも式の成立を確認している。
今回、恒等式の意味を持つ極限公式がはじめて得られた。上記 $e^{\pi x}$[恒等]極限公式の二式である。それらは恒等式の極限公式なので、[恒等]極限公式と名付けた。

$e^{\pi x}$[恒等]極限公式は x が任意の実数で成り立つ点が重要であり、これまでに得た極限公式と一線を画している。

なお、lim での a->+0 は a をプラス側から 0 に近づける意味、a->±0 は a をプラス側、マイナス側どちらから 0 に近づけてもＯＫの意味である

＜Ｓ８－１＞と＜Ｓ８－１－２＞を並べよう。

$$e^{\pi}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin a}{\mathrm{ch}a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\sin a}{\mathrm{ch}2a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin a}{\mathrm{ch}3a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\sin a}{\mathrm{ch}4a-\sin a}\right)\cdot\cdot$$ −−＜S8−1＞

$$e^{\pi x}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin ax}{\mathrm{ch}a-\sin ax}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\sin ax}{\mathrm{ch}2a-\sin ax}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin ax}{\mathrm{ch}3a-\sin ax}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\sin ax}{\mathrm{ch}4a-\sin ax}\right)\cdot\cdot$$ −−＜S8−1−2＞

x は任意の実数

＜Ｓ８－１＞は＜Ｓ８－１－２＞のｘを１とした場合の式とわかる。＜Ｓ８－１－２＞は任意の実数のｘで成り立つ式であり、＜Ｓ８－１＞よりもずっと広い意味を持っている。

今回の式の中から上記＜Ｓ８－１－２＞の証明を以下に示す。詳細な式変形はとばした。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜S8−1−2＞の証明

下式[1]の左辺から出発する。それに対し、１３年前のこちらの 2012/8/16 の[導出]と類似的な方法を使って変形していき[1]右辺に到達する。途中でゼータの香りの漂う・・（その３０７）でのフーリエ級数、深フーリエ級数を使う（注意：フーリエ級数の表現を使っているが、それらは恒等式である。x に制限を加えているが、じつは x は任意の実数である）。この[1]は二変数の恒等式であり、私独自の用語を使うと二変数・第五基本 Cos 母等式という式を x で 0～x まで積分したものである。

$$\frac{\sin x}{(e^{a}-1)}-\frac{\sin 3x}{3(e^{3a}-1)}+\frac{\sin 5x}{5(e^{5a}-1)}-\frac{\sin 7x}{7(e^{7a}-1)}+-\cdot\cdot$$

$$=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\log\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin x}{\mathrm{ch}a-\sin x}\right)+\log\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\sin x}{\mathrm{ch}2a-\sin x}\right)+\log\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin x}{\mathrm{ch}3a-\sin x}\right)+\log\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\sin x}{\mathrm{ch}4a-\sin x}\right)+\cdot\cdot\right)\quad\text{--[1]}$$

$(a>0,\ x$ は任意実数$)$

上式で x を ax に置き換えると、次となる。

$$\frac{\sin ax}{(e^{a}-1)}-\frac{\sin 3ax}{3(e^{3a}-1)}+\frac{\sin 5ax}{5(e^{5a}-1)}-\frac{\sin 7ax}{7(e^{7a}-1)}+-\cdot\cdot$$

$$=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\log\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin ax}{\mathrm{ch}a-\sin ax}\right)+\log\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\sin ax}{\mathrm{ch}2a-\sin ax}\right)+\log\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin ax}{\mathrm{ch}3a-\sin ax}\right)+\log\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\sin ax}{\mathrm{ch}4a-\sin ax}\right)+\cdot\cdot\right)\quad\text{--[1]-2}$$

ここで a を 0 に（＋側から）近づけると、左辺の各項は 0/0 となるからロピタルの定理を使って次を得る。

$$x\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+-\cdot\cdot\right)=\lim_{a\to+0}\left(\frac{1}{4}\right)\log\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin ax}{\mathrm{ch}a-\sin ax}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\sin ax}{\mathrm{ch}2a-\sin ax}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin ax}{\mathrm{ch}3a-\sin ax}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\sin ax}{\mathrm{ch}4a-\sin ax}\right)\cdot\cdot$$

左辺は xπ/4 になるから、簡単な式変形を行うと目標の＜Ｓ８－１－２＞に到達する。

$$e^{\pi x}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin ax}{\mathrm{ch}a-\sin ax}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\sin ax}{\mathrm{ch}2a-\sin ax}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin ax}{\mathrm{ch}3a-\sin ax}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\sin ax}{\mathrm{ch}4a-\sin ax}\right)\cdot\cdot$$ −−＜S8−1−2＞

x は任意の実数

終わり。
＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

　＜Ｓ８－１―２＞はこのようにして得られた。

証明では x を ax に置き換えた点がポイントである。それは一見単純な作業だが、そこには奥深い操作が含まれている。簡単にいうと、無限個の無限集合 A,B,C・・から適当な点（要素）を一つ一つ選んでは再構成していくという気の遠くなる作業が含まれていて、それらは数学の神様か悪魔にお願いするしかない操作であるが、空想の中では一瞬に行えてしまうものである（選択公理というものに当たるのかもしれない）。そのような思想が含まれているのが、x を ax に置き換える操作である。そんな哲理があるにせよ、操作自体は極めて簡単で、ただ x を ax に置き換えるだけであり中学生でもできる。

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●＜Ｓ４－５＞～＜Ｓ４－７＞を眺めたい。

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} 2\left(\tan^{-1}\left(\frac{sha}{ch2a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{sha}{ch6a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{sha}{ch10a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{sha}{ch14a}\right)+\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S4-5>}$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} \left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{sha}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{1}{sh3a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{sh5a}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{1}{sh7a}\right)+-\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S4-6>}$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} 4\left(\tan^{-1}\left(\frac{sha}{ch4a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{sha}{ch12a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{sha}{ch20a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{sha}{ch28a}\right)+\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S4-7>}$$

　＜Ｓ４－６＞は、π/4=1 -1/3 +1/5 -1/7 +-・・を連想させる。

＜Ｓ４－５＞と＜Ｓ４－７＞は、おそらく次のような任意の x（ｘ＞0）で成り立つ式がどこかに存在していて、そこから来ている気がする。

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} x\left(\tan^{-1}\left(\frac{sha}{ch\,xa}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{sha}{ch3xa}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{sha}{ch5xa}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{sha}{ch7xa}\right)+\cdot\cdot\right)$$

●次の四式を眺めたい。

$$e^{\pi}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{cha+\sin a}{cha-\sin a}\right)\left(\frac{ch2a+\sin a}{ch2a-\sin a}\right)\left(\frac{ch3a+\sin a}{ch3a-\sin a}\right)\left(\frac{ch4a+\sin a}{ch4a-\sin a}\right)\cdot\cdot \quad \text{--<S8-1>}$$

$$e^{\pi x}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{cha+\sin ax}{cha-\sin ax}\right)\left(\frac{ch2a+\sin ax}{ch2a-\sin ax}\right)\left(\frac{ch3a+\sin ax}{ch3a-\sin ax}\right)\left(\frac{ch4a+\sin ax}{ch4a-\sin ax}\right)\cdot\cdot \quad \text{--<S8-1-2>}$$

x は任意の実数

$$e^{\pi}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin a}{\mathrm{ch}a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin a}{\mathrm{ch}3a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}5a+\sin a}{\mathrm{ch}5a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}7a+\sin a}{\mathrm{ch}7a-\sin a}\right)^2\cdot\cdot\quad\text{--<S8−2>}$$

$$e^{\pi x}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin ax}{\mathrm{ch}a-\sin ax}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin ax}{\mathrm{ch}3a-\sin ax}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}5a+\sin ax}{\mathrm{ch}5a-\sin ax}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}7a+\sin ax}{\mathrm{ch}7a-\sin ax}\right)^2\cdot\cdot\quad\text{--<S8−2−2>}$$

x は任意の実数

　これらから＜Ｓ８－１＞が＜Ｓ８－１－２＞の特別な場合であり、＜Ｓ８－２＞が＜Ｓ８－２－２＞の特別な場合であることがわかる。繰り返すが、青色式は任意の x で成り立つので恒等式である。

　この四式は（上方の＜Ｏ１－１＞もそうだが）、三角関数と双曲線関数が並列で並んでいて味わい深いことこの上ない！

●ここ一月でたくさんの極限公式を得た。それは過去に大量の恒等式をノートに書いていて、それを利用できたおかげである。しかしπ^3/32 極限公式（L(3)極限公式）は、いまだ一つしか得られていない。

　　L(4),L(5),L(6)・・やζ(4),ζ(5),ζ(6)・・などの極限公式は一つも得られていない。ものすごく複雑な計算をすれば出てくるような気もするが、曖昧模糊としている。あるいは、それらをすっきりと簡単に得る方法があるのだろうか。現時点ではまったくわからない。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2025.2.8 杉岡幹生

＜参考文献＞

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)