＜ 三角関数と双曲線関数の融合域（その３０）＞

新たに極限公式が四つ得られたので下方に青色式で示す。これまでの式と一緒に示した。

なお、L(2)はL(2)＝1 −1/3^2 +1/5^2 −1/7^2 +−・・である（カタランの定数）。
ζ(3)はζ(3)＝1 +1/2^3 +1/3^3 +1/4^3 +・である。
π/4 はL(1)そのものである。π^2/6 はζ(2)、π^2/8 は(3/4)ζ(2)である。
L(3)はL(3)＝1 −1/3^3 +1/5^3 −1/7^3 +−・・＝π^3/32 である。

以下では、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。a は任意の実数である。tan^{-1}, th^{-1} はそれぞれ arctan,arctanh である。log は自然対数、e は自然対数の底。

なお、sin, cos, tan は通常の表記であり、例えば、sina は sin(a)のことである。

＝＝＝

＜ 極限公式 ＞

◆√2 極限公式

$$\sqrt{2}=\lim_{a\to+0}(1+e^{-a})(1+e^{-3a})^{-1}(1+e^{-5a})(1+e^{-7a})^{-1}(1+e^{-9a})(1+e^{-11a})^{-1}\cdot\cdot \quad \text{---<N1-2>}$$

$$\sqrt{2}=\lim_{a\to+0}(1+e^{-a})(1+e^{-2a})^{-1}(1+e^{-3a})(1+e^{-4a})^{-1}(1+e^{-5a})(1+e^{-6a})^{-1}\cdot\cdot \quad \text{---<P1-4>}$$

◆$2^{1/4}$極限公式

$$2^{1/4}=\lim_{a\to+0}(1+e^{-a})(1+e^{-2a})^{-2}(1+e^{-3a})^{3}(1+e^{-4a})^{-4}(1+e^{-5a})^{5}(1+e^{-6a})^{-6}\cdot\cdot \quad \text{---<R2>}$$

◆L(2)極限公式

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}\mathrm{sha}\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sha}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh3a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh5a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh7a}}\right)+\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S1>}$$

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}\mathrm{sh}^2a\left(\frac{2}{\mathrm{ch2a}}+\frac{4}{\mathrm{ch4a}}+\frac{6}{\mathrm{ch6a}}+\frac{8}{\mathrm{ch8a}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S1-2>}$$

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}\mathrm{sh}^2a\left(\frac{1}{\mathrm{cha}}+\frac{3}{\mathrm{ch3a}}+\frac{5}{\mathrm{ch5a}}+\frac{7}{\mathrm{ch7a}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S1-3>}$$

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0} \mathrm{sh}a\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}3a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}5a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}7a}\right)+\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S1-4>}$$

◆$\frac{\pi^2}{8}$極限公式　(3ζ(2)/4 極限公式)

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}(e^a-1)\log\left(\frac{1}{\mathrm{th}a\cdot\mathrm{th}2a\cdot\mathrm{th}3a\cdot\mathrm{th}4a\cdots}\right) \quad \text{----<S2-1>}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}2a\cdot\log\left(\frac{1}{\mathrm{th}a\cdot\mathrm{th}3a\cdot\mathrm{th}5a\cdot\mathrm{th}7a\cdots}\right) \quad \text{----<S2-2>}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}^2a\left(\frac{2}{\mathrm{sh}2a}+\frac{4}{\mathrm{sh}4a}+\frac{6}{\mathrm{sh}6a}+\frac{8}{\mathrm{sh}8a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S2-3>}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}^2a\left(\frac{1}{\mathrm{sh}a}+\frac{3}{\mathrm{sh}3a}+\frac{5}{\mathrm{sh}5a}+\frac{7}{\mathrm{sh}7a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S2-4>}$$

◆$\frac{\pi^2}{6}$極限公式（ζ(2)極限公式）

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}(1-e^a)\log\left((1-e^{-a})(1-e^{-2a})(1-e^{-3a})(1-e^{-4a})\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S3>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}2\mathrm{sh}^3a\left(\frac{1^2}{\mathrm{ch}^2a}+\frac{2^2}{\mathrm{ch}^22a}+\frac{3^2}{\mathrm{ch}^23a}+\frac{4^2}{\mathrm{ch}^24a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S3-2>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}^3a\left(\frac{1^2}{\mathrm{sh}^2a}+\frac{2^2}{\mathrm{sh}^22a}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}^23a}+\frac{4^2}{\mathrm{sh}^24a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S3-3>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}4\mathrm{sh}^2a\left(\frac{1}{e^a+1}+\frac{3}{e^{3a}+1}+\frac{5}{e^{5a}+1}+\frac{7}{e^{7a}+1}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S3-4>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}2\mathrm{sh}^2a\left(\frac{1}{e^a-1}+\frac{3}{e^{3a}-1}+\frac{5}{e^{5a}-1}+\frac{7}{e^{7a}-1}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S3-5>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}4\mathrm{sh}^2a\left(\frac{1}{e^{2a}-1}+\frac{2}{e^{4a}-1}+\frac{3}{e^{6a}-1}+\frac{4}{e^{8a}-1}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S3-6>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}4\mathrm{sh}^3a\left(\frac{1^2}{\mathrm{ch}^2a}+\frac{3^2}{\mathrm{ch}^23a}+\frac{5^2}{\mathrm{ch}^25a}+\frac{7^2}{\mathrm{ch}^27a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S3-7>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2\mathrm{sh}^3a\left(\frac{1^2}{\mathrm{sh}^2a}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{5^2}{\mathrm{sh}^2 5a}+\frac{7^2}{\mathrm{sh}^2 7a}+\cdot\ \cdot\right) \qquad \text{---<S3-8>}$$

◆$\frac{\pi}{4}$極限公式　(L(1)極限公式)

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}\frac{(e^a-1)}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}a}+\frac{1}{\mathrm{ch}2a}+\frac{1}{\mathrm{ch}3a}+\frac{1}{\mathrm{ch}4a}+\cdot\ \cdot\right) \qquad \text{----<S4-1>}$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}a\left(\frac{1}{\mathrm{ch}a}+\frac{1}{\mathrm{ch}3a}+\frac{1}{\mathrm{ch}5a}+\frac{1}{\mathrm{ch}7a}+\cdot\ \cdot\right) \qquad \text{----<S4-2>}$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}^2a\left(\frac{2\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{4\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}^2 4a}+\frac{6\mathrm{sh}6a}{\mathrm{ch}^2 6a}+\frac{8\mathrm{sh}8a}{\mathrm{ch}^2 8a}+\cdot\ \cdot\right) \qquad \text{---<S4-3>}$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}2\mathrm{sh}a\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}5a}{\mathrm{ch}10a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}7a}{\mathrm{ch}14a+\mathrm{ch}a}+\cdot\ \cdot\right) \qquad \text{--<S4-4>}$$

◆log2 極限公式

$$\log 2=\lim_{a\to+0}(e^a-1)\left(\frac{1}{e^a+1}+\frac{1}{e^{2a}+1}+\frac{1}{e^{3a}+1}+\frac{1}{e^{4a}+1}+\cdot\ \cdot\right) \qquad \text{----<S5-1>}$$

$$\log 2=\lim_{a\to+0}2(e^a-1)\left(\frac{1}{e^a+1}+\frac{1}{e^{3a}+1}+\frac{1}{e^{5a}+1}+\frac{1}{e^{7a}+1}+\cdot\ \cdot\right) \qquad \text{----<S5-2>}$$

$$\log 2=\lim_{a\to\pm0}2\mathrm{sh}^2a\left(\frac{1}{\mathrm{ch}^2a}+\frac{3}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{5}{\mathrm{ch}^2 5a}+\frac{7}{\mathrm{ch}^2 7a}+\cdot\ \cdot\right) \qquad \text{---<S5-3>}$$

$$\log 2=\lim_{a\to\pm0}\mathrm{sh}^2a\left(\frac{1}{\mathrm{ch}^2a}+\frac{2}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{3}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{4}{\mathrm{ch}^2 4a}+\cdot\ \cdot\right) \qquad \text{---<S5-4>}$$

◆ζ(3)極限公式

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{16(e^a-1)^2}{7}\log\left(\frac{1}{\mathrm{th}2a\cdot\mathrm{th}^2 3a\cdot\mathrm{th}^3 4a\cdot\mathrm{th}^4 5a\cdots}\right) \qquad \text{---<S6-1>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm0}\frac{8\mathrm{sh}^4a}{9}\left(\frac{2^3-2}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{3^3-3}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{4^3-4}{\mathrm{ch}^2 4a}+\frac{5^3-5}{\mathrm{ch}^2 5a}+\cdot\ \cdot\right) \qquad \text{---<S6-2>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm 0}\frac{2\mathrm{sh}^4 a}{3}\left(\frac{2^3-2}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{3^3-3}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{4^3-4}{\mathrm{sh}^2 4a}+\frac{5^3-5}{\mathrm{sh}^2 5a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S6−3>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm 0}\frac{16\mathrm{sh}^3 a}{7}\left(\frac{1^2}{\mathrm{sh}2a}+\frac{2^2}{\mathrm{sh}4a}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}6a}+\frac{4^2}{\mathrm{sh}8a}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S6−4>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to +0}\frac{16\mathrm{sh}^3 a}{3}\left(\frac{1^2}{e^{2a}+1}+\frac{2^2}{e^{4a}+1}+\frac{3^2}{e^{6a}+1}+\frac{4^2}{e^{8a}+1}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S6−5>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to +0}\frac{8\mathrm{sh}^2 a}{3}\log\left((1+e^{-a})(1+e^{-3a})^3(1+e^{-5a})^5(1+e^{-7a})^7\cdot\cdot\right)$$ ---<S6−6>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to +0}4\mathrm{sh}^2 a\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-2a})(1-e^{-4a})^2(1-e^{-6a})^3(1-e^{-8a})^4\cdot\cdot}\right)$$ ---<S6−7>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to +0}\frac{16\mathrm{sh}^2 a}{3}\log\left((1+e^{-2a})(1+e^{-4a})^2(1+e^{-6a})^3(1+e^{-8a})^4\cdot\cdot\right)$$ ---<S6−8>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to +0}2\mathrm{sh}^2 a\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-3a})^3(1-e^{-5a})^5(1-e^{-7a})^7\cdot\cdot}\right)$$ ---<S6−9>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to +0}\frac{4\mathrm{sh}^3 a}{3}\left(\frac{1^2}{e^{a}+1}+\frac{3^2}{e^{3a}+1}+\frac{5^2}{e^{5a}+1}+\frac{7^2}{e^{7a}+1}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S6−10>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to +0}\mathrm{sh}^3 a\left(\frac{1^2}{e^{a}-1}+\frac{3^2}{e^{3a}-1}+\frac{5^2}{e^{5a}-1}+\frac{7^2}{e^{7a}-1}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S6−11>

◆ $\frac{\pi^3}{32}$極限公式　(L(3)極限公式)

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to +0}2\mathrm{sh}^3 a\left(\frac{1^2}{\mathrm{ch}2a}+\frac{2^2}{\mathrm{ch}4a}+\frac{3^2}{\mathrm{ch}6a}+\frac{4^2}{\mathrm{ch}8a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S7−1>

◆ e^{π}極限公式

$$e^{\pi}=\lim_{a\to +0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin a}{\mathrm{ch}a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\sin a}{\mathrm{ch}2a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin a}{\mathrm{ch}3a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\sin a}{\mathrm{ch}4a-\sin a}\right)\cdot\cdot$$ --<S8−1>

$$e^{\pi}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{cha+sina}}{\mathrm{cha-sina}}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch3a+sina}}{\mathrm{ch3a-sina}}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch5a+sina}}{\mathrm{ch5a-sina}}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch7a+sina}}{\mathrm{ch7a-sina}}\right)^2 \cdot\cdot \quad \text{--<S8−2>}$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

今回は上方の四つの青色式が得られた。Wolfram Alpha での数値検証でも正しいものであった。今回はζ(3)式が二つ、π^2/6 式が二つ得られた。

なお、lim での a->+0 は a をプラス側から 0 に近づける意味、a->±0 は a をプラス側、マイナス側どちらから 0 に近づけてもＯＫの意味である

＜Ｓ６－１１＞を再掲。

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\ \mathrm{sh}^3 a\left(\frac{1^2}{e^a-1}+\frac{3^2}{e^{3a}-1}+\frac{5^2}{e^{5a}-1}+\frac{7^2}{e^{7a}-1}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S6−11>}$$

この式はシンプルで美しい！

今回の式の中から上記＜Ｓ６－１１＞の証明を以下に示す。詳細な式変形はとばした。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜S6−11＞の証明

下式[1]の左辺から出発する。それに対し、１３年前のこちらの 2012/8/16 の[導出]と類似的な方法を使って変形していき[1]右辺に到達する。途中でゼータの香りの漂う・・（その３０７）でのフーリエ級数、深フーリエ級数を使う。この[1]は二変数の恒等式であり、私独自の用語では二変数・第三基本 Cos 母等式という母等式に対応する。

$$\frac{\cos x}{e^a-1}+\frac{\cos 3x}{e^{3a}-1}+\frac{\cos 5x}{e^{5a}-1}+\frac{\cos 7x}{e^{7a}-1}+\cdot\cdot$$

$$=\cos x\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a}-\cos 2x}+\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch4a}-\cos 2x}+\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch6a}-\cos 2x}+\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch8a}-\cos 2x}+\cdot\cdot\right) \quad \text{--[1]}$$

$(a>0,\ x$ は任意実数$)$

上式を両辺 x で微分した式の両辺を sinx で割って x->0 としてロピタルの定理を適用すると、次式を得る。

$$\frac{1^2}{e^a-1}+\frac{3^2}{e^{3a}-1}+\frac{5^2}{e^{5a}-1}+\frac{7^2}{e^{7a}-1}+\cdot\cdot$$

$$=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\mathrm{ch2a}+3}{\mathrm{sh}^3 a}+\frac{\mathrm{ch4a}+3}{\mathrm{sh}^3 2a}+\frac{\mathrm{ch6a}+3}{\mathrm{sh}^3 3a}+\frac{\mathrm{ch8a}+3}{\mathrm{sh}^3 4a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{--[2]}$$

上式の両辺に $\mathrm{sh}^3 a$ を掛けて、a->0 として右辺にロピタルの定理を適用すると（ロピタル定理を３回使う）、右辺はζ(3)となる。左辺、右辺を逆にすると、目的の＜Ｓ６－１１＞に到達する。

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\ \mathrm{sh}^3 a\left(\frac{1^2}{e^a-1}+\frac{3^2}{e^{3a}-1}+\frac{5^2}{e^{5a}-1}+\frac{7^2}{e^{7a}-1}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S6−11>}$$

終わり。
＝＝

＜Ｓ６－１１＞はこのようにして得られた。証明のポイントは[2]の両辺にわざわざ sh^3a を掛ける点である。ロピタルの定理を何度も使ったりするが、計算の工夫で割合早く＜Ｓ６－１１＞に到達できる。計算自体は難しくない。なお、他式も類似の方法で得られる。

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

＝＝
●ζ(3)極限公式は、これで１１個にもなってしまった。

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0} sh^3a\left(\frac{1^2}{e^a-1}+\frac{3^2}{e^{3a}-1}+\frac{5^2}{e^{5a}-1}+\frac{7^2}{e^{7a}-1}+\cdot\cdot\right) \qquad \text{----}\langle S6-11\rangle$$

なかでもこの式はシンプルで素晴らしい。繰り返しになるが、証明はできてもふしぎな感じは抜けず、どうしてこんな式が成り立つのか？本当のところはよくわからない。

●極限公式は、二変数の三角関数と双曲線関数の融合域から出てきている。すこし前に三変数域に手を付けたが、そこは霧がたちこめるおそろしい森であって、それでちょっと二変数域に舞い戻ってきた際に極限公式を発見したのだけれども、二変数の豊かさも想像を超えている。

●＜Ｓ３－７＞と＜Ｓ３－８＞を再掲。

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 4sh^3a\left(\frac{1^2}{ch^2a}+\frac{3^2}{ch^23a}+\frac{5^2}{ch^25a}+\frac{7^2}{ch^27a}+\cdot\cdot\right) \qquad \text{---}\langle S3-7\rangle$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2sh^3a\left(\frac{1^2}{sh^2a}+\frac{3^2}{sh^23a}+\frac{5^2}{sh^25a}+\frac{7^2}{sh^27a}+\cdot\cdot\right) \qquad \text{---}\langle S3-8\rangle$$

これらも対称的で面白い形である。どうして右辺が左辺に収束するのか、ぱっと見ではわからない。。
＝＝

2025.2.2 杉岡幹生

＜参考文献＞
・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)