# ＜ 三角関数と双曲線関数の融合域（その２９）＞ rev1.01

新たに極限公式が八つ得られたので下方に青色式で示す。これまでの式と一緒に示した。

なお、L(2)はL(2)＝$1-1/3^2+1/5^2-1/7^2+-$・・である（カタランの定数）。
ζ(3)はζ(3)＝$1+1/2^3+1/3^3+1/4^3+$・である。
π/4はL(1)そのものである。$\pi^2/6$はζ(2)、$\pi^2/8$は(3/4)ζ(2)である。
L(3)はL(3)＝$1-1/3^3+1/5^3-1/7^3+-$・・＝$\pi^3/32$である。

以下では、双曲線関数sinh, cosh, tanhはそれぞれsh, ch, thと略記した。例えば、sh2aはsinh(2a)のことである。aは任意の実数である。$\tan^{-1}$, $\mathrm{th}^{-1}$はそれぞれarctan,arctanhである。logは自然対数、eは自然対数の底。
なお、sin, cos, tanは通常の表記であり、例えば、sinaはsin(a)のことである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

## ＜ 極限公式 ＞

### ◆√2 極限公式

$$\sqrt{2}=\lim_{a\to+0}(1+e^{-a})(1+e^{-3a})^{-1}(1+e^{-5a})(1+e^{-7a})^{-1}(1+e^{-9a})(1+e^{-11a})^{-1}\cdot\cdot$$ ---＜N1-2＞

$$\sqrt{2}=\lim_{a\to+0}(1+e^{-a})(1+e^{-2a})^{-1}(1+e^{-3a})(1+e^{-4a})^{-1}(1+e^{-5a})(1+e^{-6a})^{-1}\cdot\cdot$$ ---＜P1-4＞

### ◆$2^{1/4}$極限公式

$$2^{1/4}=\lim_{a\to+0}(1+e^{-a})(1+e^{-2a})^{-2}(1+e^{-3a})^{3}(1+e^{-4a})^{-4}(1+e^{-5a})^{5}(1+e^{-6a})^{-6}\cdot\cdot$$ ---＜R2＞

### ◆L(2)極限公式

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}\mathrm{sha}\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sha}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh3a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh5a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh7a}}\right)+\cdot\cdot\right)$$ ---＜S1＞

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}\mathrm{sh}^2a\left(\frac{2}{\mathrm{ch2a}}+\frac{4}{\mathrm{ch4a}}+\frac{6}{\mathrm{ch6a}}+\frac{8}{\mathrm{ch8a}}+\cdot\cdot\right)$$ ----＜S1－2＞

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}\mathrm{sh}^2a\left(\frac{1}{\mathrm{cha}}+\frac{3}{\mathrm{ch3a}}+\frac{5}{\mathrm{ch5a}}+\frac{7}{\mathrm{ch7a}}+\cdot\cdot\right)$$ ----＜S1－3＞

$$L(2)=\lim_{a\to\pm 0} \mathrm{sha}\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sha}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh3a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh5a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh7a}}\right)+\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S1-4>}$$

◆$\frac{\pi^2}{8}$極限公式　(3ζ(2)/4 極限公式)

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}(e^a-1)\log\left(\frac{1}{\mathrm{tha}\cdot\mathrm{th2a}\cdot\mathrm{th3a}\cdot\mathrm{th4a}\cdots}\right) \quad \text{----<S2-1>}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh2a}\cdot\log\left(\frac{1}{\mathrm{tha}\cdot\mathrm{th3a}\cdot\mathrm{th5a}\cdot\mathrm{th7a}\cdots}\right) \quad \text{----<S2-2>}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}^2\mathrm{a}\left(\frac{2}{\mathrm{sh2a}}+\frac{4}{\mathrm{sh4a}}+\frac{6}{\mathrm{sh6a}}+\frac{8}{\mathrm{sh8a}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S2-3>}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}^2\mathrm{a}\left(\frac{1}{\mathrm{sha}}+\frac{3}{\mathrm{sh3a}}+\frac{5}{\mathrm{sh5a}}+\frac{7}{\mathrm{sh7a}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S2-4>}$$

◆$\frac{\pi^2}{6}$極限公式（ζ(2)極限公式)

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}(1-e^a)\log\left((1-e^{-a})(1-e^{-2a})(1-e^{-3a})(1-e^{-4a})\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S3>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}2\mathrm{sh}^3\mathrm{a}\left(\frac{1^2}{\mathrm{ch}^2\mathrm{a}}+\frac{2^2}{\mathrm{ch}^2 2\mathrm{a}}+\frac{3^2}{\mathrm{ch}^2 3\mathrm{a}}+\frac{4^2}{\mathrm{ch}^2 4\mathrm{a}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S3-2>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}^3\mathrm{a}\left(\frac{1^2}{\mathrm{sh}^2\mathrm{a}}+\frac{2^2}{\mathrm{sh}^2 2\mathrm{a}}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}^2 3\mathrm{a}}+\frac{4^2}{\mathrm{sh}^2 4\mathrm{a}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S3-3>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}4\mathrm{sh}^2\mathrm{a}\left(\frac{1}{e^a+1}+\frac{3}{e^{3a}+1}+\frac{5}{e^{5a}+1}+\frac{7}{e^{7a}+1}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S3-4>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}2\mathrm{sh}^2\mathrm{a}\left(\frac{1}{e^a-1}+\frac{3}{e^{3a}-1}+\frac{5}{e^{5a}-1}+\frac{7}{e^{7a}-1}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S3-5>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}4\mathrm{sh}^2\mathrm{a}\left(\frac{1}{e^{2a}-1}+\frac{2}{e^{4a}-1}+\frac{3}{e^{6a}-1}+\frac{4}{e^{8a}-1}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S3-6>}$$

◆$\frac{\pi}{4}$極限公式　(L(1)極限公式)

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}\frac{(e^a-1)}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}a}+\frac{1}{\mathrm{ch}2a}+\frac{1}{\mathrm{ch}3a}+\frac{1}{\mathrm{ch}4a}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S4−1>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}a\left(\frac{1}{\mathrm{ch}a}+\frac{1}{\mathrm{ch}3a}+\frac{1}{\mathrm{ch}5a}+\frac{1}{\mathrm{ch}7a}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S4−2>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}^2a\left(\frac{2\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}^22a}+\frac{4\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}^24a}+\frac{6\mathrm{sh}6a}{\mathrm{ch}^26a}+\frac{8\mathrm{sh}8a}{\mathrm{ch}^28a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S4−3>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}2\mathrm{sh}a\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}5a}{\mathrm{ch}10a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}7a}{\mathrm{ch}14a+\mathrm{ch}a}+\cdot\cdot\right)$$ --<S4−4>

◆log2 極限公式

$$\log2=\lim_{a\to+0}(e^a-1)\left(\frac{1}{e^a+1}+\frac{1}{e^{2a}+1}+\frac{1}{e^{3a}+1}+\frac{1}{e^{4a}+1}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S5−1>

$$\log2=\lim_{a\to+0}2(e^a-1)\left(\frac{1}{e^a+1}+\frac{1}{e^{3a}+1}+\frac{1}{e^{5a}+1}+\frac{1}{e^{7a}+1}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S5−2>

$$\log2=\lim_{a\to\pm0}2\mathrm{sh}^2a\left(\frac{1}{\mathrm{ch}^2a}+\frac{3}{\mathrm{ch}^23a}+\frac{5}{\mathrm{ch}^25a}+\frac{7}{\mathrm{ch}^27a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S5−3>

$$\log2=\lim_{a\to\pm0}\mathrm{sh}^2a\left(\frac{1}{\mathrm{ch}^2a}+\frac{2}{\mathrm{ch}^22a}+\frac{3}{\mathrm{ch}^23a}+\frac{4}{\mathrm{ch}^24a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S5−4>

◆ζ(3)極限公式

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{16(e^a-1)^2}{7}\log\left(\frac{1}{\mathrm{th}2a\cdot\mathrm{th}^23a\cdot\mathrm{th}^34a\cdot\mathrm{th}^45a\cdots}\right)$$ ---<S6−1>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm0}\frac{8\mathrm{sh}^4a}{9}\left(\frac{2^3-2}{\mathrm{ch}^22a}+\frac{3^3-3}{\mathrm{ch}^23a}+\frac{4^3-4}{\mathrm{ch}^24a}+\frac{5^3-5}{\mathrm{ch}^25a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S6−2>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm0}\frac{2\mathrm{sh}^4a}{3}\left(\frac{2^3-2}{\mathrm{sh}^22a}+\frac{3^3-3}{\mathrm{sh}^23a}+\frac{4^3-4}{\mathrm{sh}^24a}+\frac{5^3-5}{\mathrm{sh}^25a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S6−3>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm0}\frac{16\mathrm{sh}^3a}{7}\left(\frac{1^2}{\mathrm{sh}2a}+\frac{2^2}{\mathrm{sh}4a}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}6a}+\frac{4^2}{\mathrm{sh}8a}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S6−4>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{16\mathrm{sh}^3 a}{3}\left(\frac{1^2}{e^{2a}+1}+\frac{2^2}{e^{4a}+1}+\frac{3^2}{e^{6a}+1}+\frac{4^2}{e^{8a}+1}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S6−5>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{8\mathrm{sh}^2 a}{3}\log\left((1+e^{-a})(1+e^{-3a})^3(1+e^{-5a})^5(1+e^{-7a})^7\cdot\cdot\right)$$ ---<S6−6>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}4\mathrm{sh}^2 a\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-2a})(1-e^{-4a})^2(1-e^{-6a})^3(1-e^{-8a})^4\cdot\cdot}\right)$$ ---<S6−7>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{16\mathrm{sh}^2 a}{3}\log\left((1+e^{-2a})(1+e^{-4a})^2(1+e^{-6a})^3(1+e^{-8a})^4\cdot\cdot\right)$$ ---<S6−8>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}2\mathrm{sh}^2 a\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-3a})^3(1-e^{-5a})^5(1-e^{-7a})^7\cdot\cdot}\right)$$ ---<S6−9>

◆ $\frac{\pi^3}{32}$極限公式　(L(3)極限公式)

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0}2\mathrm{sh}^3 a\left(\frac{1^2}{\mathrm{ch}2a}+\frac{2^2}{\mathrm{ch}4a}+\frac{3^2}{\mathrm{ch}6a}+\frac{4^2}{\mathrm{ch}8a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S7−1>

◆ $e^{\pi}$極限公式

$$e^{\pi}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin a}{\mathrm{ch}a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\sin a}{\mathrm{ch}2a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin a}{\mathrm{ch}3a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\sin a}{\mathrm{ch}4a-\sin a}\right)\cdot\cdot$$ --<S8−1>

$$e^{\pi}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin a}{\mathrm{ch}a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin a}{\mathrm{ch}3a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}5a+\sin a}{\mathrm{ch}5a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}7a+\sin a}{\mathrm{ch}7a-\sin a}\right)^2\cdot\cdot$$ --<S8−2>

===================================

これら八つの青色式が得られた。Wolfram Alpha での数値検証でも正しいものであった。今回はζ(3)の式が多く出た。

なお、lim での a->+0 は a をプラス側から 0 に近づける意味、a->±0 は a をプラス側、マイナス側どちらから 0 に近づけてもＯＫの意味である

＜Ｓ４－４＞を再掲。

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}2\mathrm{sh}a\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}5a}{\mathrm{ch}10a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}7a}{\mathrm{ch}14a+\mathrm{ch}a}+\cdot\cdot\right)$$ --<S4−4>

　　この式はこれまで得た式とはすこし形が変わっているが、とても美しい。

　今回の式の中から上記＜Ｓ４－４＞の証明を以下に示す。詳細な式変形はとばした。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

**＜S4－4＞の証明**

　2023 年 8 月に＜ゼータの香りの漂う・・（その２９８）＞で報告した次の[1]の恒等式を出発点とする。（左辺の sh0 はゼロだが、あえて sh0 としている）

$$\frac{1}{\mathrm{sha+sh0}}-\frac{1}{\mathrm{sh2a+sha}}+\frac{1}{\mathrm{sh3a+sh2a}}-\frac{1}{\mathrm{sh4a+sh3a}}+-\cdot\cdot$$
$$=2\left\{\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a+cha}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{ch6a+cha}}+\frac{\mathrm{ch5a}}{\mathrm{ch10a+cha}}+\frac{\mathrm{ch7a}}{\mathrm{ch14a+cha}}+\cdot\cdot\right\} \quad \text{----[1]}$$

$(a>0)$

　上式の両辺に sha を掛ける（左辺は各項に掛ける）。

$$\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sha+sh0}}-\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh2a+sha}}+\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh3a+sh2a}}-\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh4a+sh3a}}+-\cdot\cdot$$
$$=2\mathrm{sha}\left\{\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a+cha}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{ch6a+cha}}+\frac{\mathrm{ch5a}}{\mathrm{ch10a+cha}}+\frac{\mathrm{ch7a}}{\mathrm{ch14a+cha}}+\cdot\cdot\right\} \quad \text{---[1]-2}$$

$(a>0)$

上式で a を 0 に（＋側から）近づけると、左辺の各項は 0/0 となるからロピタルの定理を使って次を得る。

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+-\cdot\cdot=\lim_{a\to+0}2\mathrm{sha}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a+cha}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{ch6a+cha}}+\frac{\mathrm{ch5a}}{\mathrm{ch10a+cha}}+\frac{\mathrm{ch7a}}{\mathrm{ch14a+cha}}+\cdot\cdot\right)$$

　　左辺は π/4 になるから、よって＜Ｓ４－４＞が得られた。

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}2\mathrm{sha}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a+cha}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{ch6a+cha}}+\frac{\mathrm{ch5a}}{\mathrm{ch10a+cha}}+\frac{\mathrm{ch7a}}{\mathrm{ch14a+cha}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S4-4>}$$

終わり。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

　＜Ｓ４－４＞はこのようにして得られた。証明のポイントは[1]の両辺に sha を掛ける操作である。他式も類似の方法で得られる。

　最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●＜Ｓ６－５＞から＜Ｓ６－９＞を再掲。

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{16\mathrm{sh}^3a}{3}\left(\frac{1^2}{e^{2a}+1}+\frac{2^2}{e^{4a}+1}+\frac{3^2}{e^{6a}+1}+\frac{4^2}{e^{8a}+1}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S6−5>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{8\mathrm{sh}^2a}{3}\log\left((1+e^{-a})(1+e^{-3a})^3(1+e^{-5a})^5(1+e^{-7a})^7\cdot\cdot\right)$$ ---<S6−6>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}4\mathrm{sh}^2a\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-2a})(1-e^{-4a})^2(1-e^{-6a})^3(1-e^{-8a})^4\,.\,.}\right)$$ ---<S6−7>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{16\mathrm{sh}^2a}{3}\log\left((1+e^{-2a})(1+e^{-4a})^2(1+e^{-6a})^3(1+e^{-8a})^4\cdot\cdot\right)$$ ---<S6−8>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}2\mathrm{sh}^2a\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-3a})^3(1-e^{-5a})^5(1-e^{-7a})^7\,.\,.}\right)$$ ---<S6−9>

このように今回はζ(3)の式が多く得られた。ζ(3)式は計９個にもなった。一方、L(3)式（つまりπ^3/32 極限公式）はまだ１個だけである。どうしてζ(3)がたくさん出て、L(3)が少ないのか？よくわからないが、おそらく私の気づいていない式変形の方法があって、L(3)式は地中に埋もれているだけなのだと思う。

上式はどれも魅力的だが、log 内はテータ関数の類似物のようなものになっていてその点が極めて興味深い。テータ類似物がゼータ特殊値を生み出している。

●$e^\pi$極限公式を眺めたい。

$$e^{\pi}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin a}{\mathrm{ch}a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\sin a}{\mathrm{ch}2a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin a}{\mathrm{ch}3a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\sin a}{\mathrm{ch}4a-\sin a}\right)\cdot\cdot$$ --<S8−1>

$$e^{\pi}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin a}{\mathrm{ch}a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin a}{\mathrm{ch}3a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}5a+\sin a}{\mathrm{ch}5a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}7a+\sin a}{\mathrm{ch}7a-\sin a}\right)^2\cdot\cdot$$ --<S8−2>

極限公式の中でも、この二つは特別なものに見える。美しいだけでなく異様なものを感じる。双曲線関数と三角関数が並列に並んでいる点が異様である。以前も述べたが、数学の式は美しさだけでなく、ふしぎさや異様さを備えたものがあるが、それらは特別な式であることが多い。上の２式はマグマが煮えたぎっているようなエネルギーをもっている。

●次の三式を眺めたい。

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}(1-e^{a})\log\left((1-e^{-a})(1-e^{-2a})(1-e^{-3a})(1-e^{-4a})\cdot\cdot\right)$$ ----<S3>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{8\mathrm{sh}^2 a}{3}\log\left((1+e^{-a})(1+e^{-3a})^3(1+e^{-5a})^5(1+e^{-7a})^7\cdot\cdot\right)$$ ---＜S6－6＞

$$e^{\pi}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{cha}+\mathrm{sina}}{\mathrm{cha}-\mathrm{sina}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch2a}+\mathrm{sina}}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{sina}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch3a}+\mathrm{sina}}{\mathrm{ch3a}-\mathrm{sina}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch4a}+\mathrm{sina}}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{sina}}\right)\cdot\cdot$$ --＜S8－1＞

　これらを代表選手として粗く述べると、ヤコビのテータ関数というものが、ゼータや保型形式の世界で大事な役割を果たしていると思う。

　以前から思っているのだが、例えば、$(1+e^{-a})(1+e^{-3a})^3(1+e^{-5a})^5$・・は$(1+e^{-a})(1+e^{-3a})(1+e^{-5a})$・・の親分（や兄弟）のようなものであり、さらに(cha+sina)(ch2a+sina)(ch3a+sina)・・はまたそれらの親分としてあるようなそんな世界になっているに違いない。上記式では、＜Ｓ８－１＞がもっとも深いところから来ている気がする。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2025.1.25 杉岡幹生

＜参考文献＞

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」（Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社）

・テータ関数, イータ関数の特殊値を求める ｜ Mathlog

・可積分系とコマ（その１７）（ikuro-kotaro.sakura.ne.jp）

[改訂 rev1.01] ＜Ｓ２－５＞は＜Ｓ２－２＞と同値、＜Ｓ４－５＞は＜Ｓ４－２＞と同値と分かった。よって、それぞれ前者の方を削除した。それに準じて文内容も若干書き換えた。2025.1.27