＜ 三角関数と双曲線関数の融合域（その２８）＞

極限公式が新たに四つ得られたので下方に青色式で示す。これまでの式と一緒に示した。今回 e^{π} の極限公式がはじめて得られた。

なお、L(2)はL(2)＝1 $-1/3^2+1/5^2-1/7^2+-$・・である（カタランの定数）。
ζ(3)はζ(3)＝1 $+1/2^3+1/3^3+1/4^3+$・である。
π/4 はL(1)そのものである。$\pi^2/6$ はζ(2)、$\pi^2/8$ は(3/4)ζ(2)である。
L(3)はL(3)＝1 $-1/3^3+1/5^3-1/7^3+-$・・＝$\pi^3/32$ である。

以下では、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。a は任意の実数である。$\tan^{-1}$, th^{-1} はそれぞれ arctan,arctanh である。log は自然対数、e は自然対数の底。
なお、sin, cos, tan は通常の表記であり、例えば、sina は sin(a)のことである。

＝＝

＜ 極限公式 ＞

◆√2 極限公式

$$\sqrt{2}=\lim_{a\to+0}(1+e^{-a})(1+e^{-3a})^{-1}(1+e^{-5a})(1+e^{-7a})^{-1}(1+e^{-9a})(1+e^{-11a})^{-1}\cdot\cdot \quad \text{---＜N1-2＞}$$

$$\sqrt{2}=\lim_{a\to+0}(1+e^{-a})(1+e^{-2a})^{-1}(1+e^{-3a})(1+e^{-4a})^{-1}(1+e^{-5a})(1+e^{-6a})^{-1}\cdot\cdot \quad \text{---＜P1-4＞}$$

◆$2^{1/4}$極限公式

$$2^{1/4}=\lim_{a\to+0}(1+e^{-a})(1+e^{-2a})^{-2}(1+e^{-3a})^{3}(1+e^{-4a})^{-4}(1+e^{-5a})^{5}(1+e^{-6a})^{-6}\cdot\cdot \quad \text{---＜R2＞}$$

◆L(2)極限公式

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}\mathrm{sha}\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sha}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh3a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh5a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh7a}}\right)+\cdot\cdot\right) \quad \text{---＜S1＞}$$

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}\mathrm{sh}^2a\left(\frac{2}{\mathrm{ch2a}}+\frac{4}{\mathrm{ch4a}}+\frac{6}{\mathrm{ch6a}}+\frac{8}{\mathrm{ch8a}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----＜S1－2＞}$$

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}\mathrm{sh}^2a\left(\frac{1}{\mathrm{cha}}+\frac{3}{\mathrm{ch3a}}+\frac{5}{\mathrm{ch5a}}+\frac{7}{\mathrm{ch7a}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----＜S1－3＞}$$

$$L(2)=\lim_{a\to\pm 0} \mathrm{sha}\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sha}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh3a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh5a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh7a}}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --<S1−4>

◆$\frac{\pi^2}{8}$極限公式　(3ζ(2)/4 極限公式)

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}(e^a-1)\log\left(\frac{1}{\mathrm{tha\cdot th2a\cdot th3a\cdot th4a}\cdots}\right)$$ ----<S2−1>

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh2a}\cdot\log\left(\frac{1}{\mathrm{tha\cdot th3a\cdot th5a\cdot th7a}\cdots}\right)$$ ----<S2−2>

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}^2\mathrm{a}\left(\frac{2}{\mathrm{sh2a}}+\frac{4}{\mathrm{sh4a}}+\frac{6}{\mathrm{sh6a}}+\frac{8}{\mathrm{sh8a}}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S2−3>

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}^2\mathrm{a}\left(\frac{1}{\mathrm{sha}}+\frac{3}{\mathrm{sh3a}}+\frac{5}{\mathrm{sh5a}}+\frac{7}{\mathrm{sh7a}}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S2−4>

◆$\frac{\pi^2}{6}$極限公式（ζ(2) 極限公式)

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}(1-e^a)\log\left((1-e^{-a})(1-e^{-2a})(1-e^{-3a})(1-e^{-4a})\cdot\cdot\right)$$ ----<S3>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}2\mathrm{sh}^3\mathrm{a}\left(\frac{1^2}{\mathrm{ch}^2\mathrm{a}}+\frac{2^2}{\mathrm{ch}^2 2\mathrm{a}}+\frac{3^2}{\mathrm{ch}^2 3\mathrm{a}}+\frac{4^2}{\mathrm{ch}^2 4\mathrm{a}}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S3−2>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}^3\mathrm{a}\left(\frac{1^2}{\mathrm{sh}^2\mathrm{a}}+\frac{2^2}{\mathrm{sh}^2 2\mathrm{a}}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}^2 3\mathrm{a}}+\frac{4^2}{\mathrm{sh}^2 4\mathrm{a}}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S3−3>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}4\mathrm{sh}^2\mathrm{a}\left(\frac{1}{e^a+1}+\frac{3}{e^{3a}+1}+\frac{5}{e^{5a}+1}+\frac{7}{e^{7a}+1}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S3−4>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}2\mathrm{sh}^2\mathrm{a}\left(\frac{1}{e^a-1}+\frac{3}{e^{3a}-1}+\frac{5}{e^{5a}-1}+\frac{7}{e^{7a}-1}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S3−5>

◆$\frac{\pi}{4}$極限公式　(L(1) 極限公式)

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}\frac{(e^a-1)}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch2a}}+\frac{1}{\mathrm{ch3a}}+\frac{1}{\mathrm{ch4a}}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S4−1>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}\mathrm{sha}\left(\frac{1}{\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch3a}}+\frac{1}{\mathrm{ch5a}}+\frac{1}{\mathrm{ch7a}}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S4−2>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}^2a\left(\frac{2\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{4\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}^2 4a}+\frac{6\mathrm{sh}6a}{\mathrm{ch}^2 6a}+\frac{8\mathrm{sh}8a}{\mathrm{ch}^2 8a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S4−3>

◆log2 極限公式

$$\log2=\lim_{a\to+0}(e^a-1)\left(\frac{1}{e^a+1}+\frac{1}{e^{2a}+1}+\frac{1}{e^{3a}+1}+\frac{1}{e^{4a}+1}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S5−1>

$$\log2=\lim_{a\to+0}2(e^a-1)\left(\frac{1}{e^a+1}+\frac{1}{e^{3a}+1}+\frac{1}{e^{5a}+1}+\frac{1}{e^{7a}+1}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S5−2>

$$\log2=\lim_{a\to\pm0}2\mathrm{sh}^2a\left(\frac{1}{\mathrm{ch}^2a}+\frac{3}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{5}{\mathrm{ch}^2 5a}+\frac{7}{\mathrm{ch}^2 7a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S5−3>

$$\log2=\lim_{a\to\pm0}\mathrm{sh}^2a\left(\frac{1}{\mathrm{ch}^2a}+\frac{2}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{3}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{4}{\mathrm{ch}^2 4a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S5−4>

◆ζ(3)極限公式

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{16(e^a-1)^2}{7}\log\left(\frac{1}{\mathrm{th}2a\cdot\mathrm{th}^2 3a\cdot\mathrm{th}^3 4a\cdot\mathrm{th}^4 5a\cdots}\right)$$ ---<S6−1>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm0}\frac{8\mathrm{sh}^4a}{9}\left(\frac{2^3-2}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{3^3-3}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{4^3-4}{\mathrm{ch}^2 4a}+\frac{5^3-5}{\mathrm{ch}^2 5a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S6−2>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm0}\frac{2\mathrm{sh}^4a}{3}\left(\frac{2^3-2}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{3^3-3}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{4^3-4}{\mathrm{sh}^2 4a}+\frac{5^3-5}{\mathrm{sh}^2 5a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S6−3>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm0}\frac{16\mathrm{sh}^3a}{7}\left(\frac{1^2}{\mathrm{sh}2a}+\frac{2^2}{\mathrm{sh}4a}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}6a}+\frac{4^2}{\mathrm{sh}8a}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S6−4>

◆ $\frac{\pi^3}{32}$極限公式　(L(3)極限公式)

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0}2\mathrm{sh}^3a\left(\frac{1^2}{\mathrm{ch}2a}+\frac{2^2}{\mathrm{ch}4a}+\frac{3^2}{\mathrm{ch}6a}+\frac{4^2}{\mathrm{ch}8a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S7−1>

◆ e^{π}極限公式

$$e^{\pi}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{cha+sina}{cha-sina}\right)\left(\frac{ch2a+sina}{ch2a-sina}\right)\left(\frac{ch3a+sina}{ch3a-sina}\right)\left(\frac{ch4a+sina}{ch4a-sina}\right)\cdot\cdot \quad \text{--<S8-1>}$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

これら四つの青色式が得られた。数学アプリケーション Wolfram Alpha での数値検証でも正しいものであった。今回はじめて e^{π}極限公式が得られた。

なお、lim での a->+0 は a をプラス側から 0 に近づける意味、a->±0 は a をプラス側、マイナス側どちらから 0 に近づけてもＯＫの意味である

四つの式の中ではすぐ上の e^{π}極限公式が簡明で美しい。

今回の式の中からその＜Ｓ８－１＞の証明を以下に示す。詳細な式変形はとばした。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜S8－1＞の証明

下式[1]の左辺から出発する。それに対し、１３年前のこちらの 2012/8/16 の[導出]と類似的な方法を使って変形していき[1]右辺に到達する。途中でゼータの香りの漂う・・（その３０７）でのフーリエ級数、深フーリエ級数を使う。この[1]は、二変数の恒等式であり、私独自の用語を使うと二変数・第五基本 Cos 母等式という母等式を x で 0～x まで積分したものである。

$$\frac{sinx}{(e^{a}-1)}-\frac{sin3x}{3(e3^{a}-1)}+\frac{sin5x}{5(e^{5a}-1)}-\frac{sin7x}{7(e^{7a}-1)}+-\cdot\cdot$$

$$=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\log\left(\frac{cha+sinx}{cha-sinx}\right)+\log\left(\frac{ch2a+sinx}{ch2a-sinx}\right)+\log\left(\frac{ch3a+sinx}{ch3a-sinx}\right)+\log\left(\frac{ch4a+sinx}{ch4a-sinx}\right)+\cdot\cdot\right) \quad \text{--[1]}$$

$$(a>0,\ x\text{は任意実数})$$

上式で x を a に置き換えると、次となる。

$$\frac{sina}{(e^{a}-1)}-\frac{sin3a}{3(e3^{a}-1)}+\frac{sin5a}{5(e^{5a}-1)}-\frac{sin7a}{7(e^{7a}-1)}+-\cdot\cdot$$

$$=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\log\left(\frac{cha+sina}{cha-sina}\right)+\log\left(\frac{ch2a+sina}{ch2a-sina}\right)+\log\left(\frac{ch3a+sina}{ch3a-sina}\right)+\log\left(\frac{ch4a+sina}{ch4a-sina}\right)+\cdot\cdot\right) \quad \text{--[1]-2}$$

ここで a を 0 に（＋側から）近づけると、左辺の各項は 0/0 となるからロピタルの定理を使って次を得る。

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+-\cdot\cdot=\lim_{a\to+0}\left(\frac{1}{4}\right)\log\left(\frac{cha+sina}{cha-sina}\right)\left(\frac{ch2a+sina}{ch2a-sina}\right)\left(\frac{ch3a+sina}{ch3a-sina}\right)\left(\frac{ch4a+sina}{ch4a-sina}\right)\cdot\cdot$$

左辺は $\pi/4$ になるから、簡単な式変形で＜Ｓ８－１＞に到達する。

終わり。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

　　＜Ｓ８－１＞はこのようにして得られた。他式は前回までの類似の方法で得られる。

　最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●証明でもっとも重要なものは[1]である。この式はエネルギーを秘めており、これ一つからさまざまな公式が飛び出してくる。

　[1]は 2023 年 9 月に得たものだが、そのときは今回の極限公式は思いつかなかった。＜Ｓ８－１＞に到達するまで１年以上かかったのは機が熟していないというのか、そういうことがあるかもしれない。

　証明中でもっともデリケートな所は x を a で置き換えた点である。これは簡単な操作だが、数学的には奥深い操作が絡んでおり、a の実数軸上での全ての実数点（非可算個！！）それぞれの点においてその a 点の a と等しい x を持ってきて式を得る（Ａ１式成立）。また次の別の a 点と等しい x を持ってきて式を得る（Ａ２式成立）。さらにまた・・（Ａ３式成立）。とこのように無限個の a 点で成立した式Ａ１、Ａ２、Ａ３・・それらを全部（非可算個）つないだ式が＜Ｓ８－１＞となる。

　言葉で述べればこのようなややこしいことになるのだが、操作自体はまったく簡単で、[1]で x を a に置き換えるだけである。

●＜Ｓ８－１＞を再掲。

$$e^{\pi}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{cha}+\mathrm{sina}}{\mathrm{cha}-\mathrm{sina}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch2a}+\mathrm{sina}}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{sina}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch3a}+\mathrm{sina}}{\mathrm{ch3a}-\mathrm{sina}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch4a}+\mathrm{sina}}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{sina}}\right)\cdot\cdot \quad \text{--<S8-1>}$$

　これは美しく、そしてふしぎな形をしている。双曲線関数と三角関数が対等に並んでいる点が珍しい。

　　cha は cosh(a)だが、

$$\cosh(a)=1+x^2/2!+x^2/4!+x^2/6!+\cdot\cdot \qquad (-\infty<x<\infty)$$

　また sina は sin(a)だが

$$\sin(a)=x-x^3/3!+x^5/5!-x^7/7!+-\cdot\cdot \qquad (-\infty<x<\infty)$$

　　このべき展開を見ても＜Ｓ８－１＞は直観を超えたところから来ているようにしか見えない。

●Wolfram Alpha で検証実験を起こっていると「e^{π}は超越数です」と教えてくれる。

　　私は、一連の極限公式を得はじめてから「極限公式を使うことで L(2)やζ(3)の超越性を示せないだろうか？」と思っていた。すると先日、Mu さんが「この極限公式を利用して ζ（３）の超越性が証明できないものでしょうか」と来て、同じことを考えている人がいると知り驚いた。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2025.1.18 杉岡幹生

＜参考文献＞

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)