＜ 三角関数と双曲線関数の融合域（その２７）＞ rev1.01

さらに極限公式が八つ得られたので下方に青色式で示す。これまでの極限公式と一緒に示した。今回はじめてπ^3/32（つまりL(3)）極限公式が得られた。

なお、L(2)はL(2)＝1 $-1/3^2+1/5^2-1/7^2$+−・・である。ζ(3)はζ(3)＝1 $+1/2^3+1/3^3+1/4^3$+・である。
π/4はL(1)そのものである。π^2/6はζ(2)、π^2/8は(3/4)ζ(2)である。
L(3)はL(3)＝1 $-1/3^3+1/5^3-1/7^3$+−・・＝π^3/32である。

以下では、双曲線関数sinh, cosh, tanhはそれぞれsh, ch, thと略記した。例えば、sh2aはsinh(2a)のことである。aは任意の実数である。$\tan^{-1}$, th^{-1}はそれぞれarctan, arctanhである。logは自然対数、eは自然対数の底。

＝＝

＜ 極限公式 ＞

◆√2極限公式

$$\sqrt{2}=\lim_{a\to+0}(1+e^{-a})(1+e^{-3a})^{-1}(1+e^{-5a})(1+e^{-7a})^{-1}(1+e^{-9a})(1+e^{-11a})^{-1}\cdot\cdot \quad \text{---＜N1-2＞}$$

$$\sqrt{2}=\lim_{a\to+0}(1+e^{-a})(1+e^{-2a})^{-1}(1+e^{-3a})(1+e^{-4a})^{-1}(1+e^{-5a})(1+e^{-6a})^{-1}\cdot\cdot \quad \text{---＜P1-4＞}$$

◆$2^{1/4}$極限公式

$$2^{1/4}=\lim_{a\to+0}(1+e^{-a})(1+e^{-2a})^{-2}(1+e^{-3a})^{3}(1+e^{-4a})^{-4}(1+e^{-5a})^{5}(1+e^{-6a})^{-6}\cdot\cdot \quad \text{---＜R2＞}$$

◆L(2)極限公式

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}\mathrm{sha}\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sha}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh3a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh5a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh7a}}\right)+\cdot\cdot\right) \quad \text{---＜S1＞}$$

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}\mathrm{sh}^2\mathrm{a}\left(\frac{2}{\mathrm{ch2a}}+\frac{4}{\mathrm{ch4a}}+\frac{6}{\mathrm{ch6a}}+\frac{8}{\mathrm{ch8a}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----＜S1−2＞}$$

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}\mathrm{sh}^2\mathrm{a}\left(\frac{1}{\mathrm{cha}}+\frac{3}{\mathrm{ch3a}}+\frac{5}{\mathrm{ch5a}}+\frac{7}{\mathrm{ch7a}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----＜S1−3＞}$$

◆$\frac{\pi^2}{8}$極限公式　(3ζ(2)/4 極限公式)

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}(e^a-1)\log\left(\frac{1}{\mathrm{tha}\cdot\mathrm{th2a}\cdot\mathrm{th3a}\cdot\mathrm{th4a}\cdots}\right)$$ ----<S2−1>

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh2a}\cdot\log\left(\frac{1}{\mathrm{tha}\cdot\mathrm{th3a}\cdot\mathrm{th5a}\cdot\mathrm{th7a}\cdots}\right)$$ ----<S2−2>

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}^2\mathrm{a}\left(\frac{2}{\mathrm{sh2a}}+\frac{4}{\mathrm{sh4a}}+\frac{6}{\mathrm{sh6a}}+\frac{8}{\mathrm{sh8a}}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S2−3>

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}^2\mathrm{a}\left(\frac{1}{\mathrm{sha}}+\frac{3}{\mathrm{sh3a}}+\frac{5}{\mathrm{sh5a}}+\frac{7}{\mathrm{sh7a}}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S2−4>

◆$\frac{\pi^2}{6}$極限公式（ζ(2) 極限公式）

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}(1-e^a)\log\left((1-e^{-a})(1-e^{-2a})(1-e^{-3a})(1-e^{-4a})\cdot\cdot\right)$$ ----<S3>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}2\mathrm{sh}^3\mathrm{a}\left(\frac{1^2}{\mathrm{ch}^2\mathrm{a}}+\frac{2^2}{\mathrm{ch}^2 2\mathrm{a}}+\frac{3^2}{\mathrm{ch}^2 3\mathrm{a}}+\frac{4^2}{\mathrm{ch}^2 4\mathrm{a}}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S3−2>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}^3\mathrm{a}\left(\frac{1^2}{\mathrm{sh}^2\mathrm{a}}+\frac{2^2}{\mathrm{sh}^2 2\mathrm{a}}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}^2 3\mathrm{a}}+\frac{4^2}{\mathrm{sh}^2 4\mathrm{a}}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S3−3>

◆$\frac{\pi}{4}$極限公式　(L(1) 極限公式)

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}\frac{(e^a-1)}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch2a}}+\frac{1}{\mathrm{ch3a}}+\frac{1}{\mathrm{ch4a}}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S4−1>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}\mathrm{sha}\left(\frac{1}{\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch3a}}+\frac{1}{\mathrm{ch5a}}+\frac{1}{\mathrm{ch7a}}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S4−2>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}^2\mathrm{a}\left(\frac{2\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch}^2 2\mathrm{a}}+\frac{4\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch}^2 4\mathrm{a}}+\frac{6\mathrm{sh6a}}{\mathrm{ch}^2 6\mathrm{a}}+\frac{8\mathrm{sh8a}}{\mathrm{ch}^2 8\mathrm{a}}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S4−3>

◆log2 極限公式

$$\log 2=\lim_{a\to+0}(e^a-1)\left(\frac{1}{e^a+1}+\frac{1}{e^{2a}+1}+\frac{1}{e^{3a}+1}+\frac{1}{e^{4a}+1}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S5−1>

$$\log 2=\lim_{a\to+0} 2(e^a-1)\left(\frac{1}{e^a+1}+\frac{1}{e^{3a}+1}+\frac{1}{e^{5a}+1}+\frac{1}{e^{7a}+1}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S5-2>}$$

$$\log 2=\lim_{a\to\pm0} 2\mathrm{sh}^2a\left(\frac{1}{\mathrm{ch}^2a}+\frac{3}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{5}{\mathrm{ch}^2 5a}+\frac{7}{\mathrm{ch}^2 7a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S5-3>}$$

$$\log 2=\lim_{a\to\pm0} \mathrm{sh}^2a\left(\frac{1}{\mathrm{ch}^2a}+\frac{2}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{3}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{4}{\mathrm{ch}^2 4a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S5-4>}$$

◆ζ(3)極限公式

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{16(e^a-1)^2}{7}\log\left(\frac{1}{\mathrm{th}2a\cdot\mathrm{th}^2 3a\cdot\mathrm{th}^3 4a\cdot\mathrm{th}^4 5a\cdots}\right) \quad \text{---<S6-1>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm0}\frac{8\mathrm{sh}^4a}{9}\left(\frac{2^3-2}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{3^3-3}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{4^3-4}{\mathrm{ch}^2 4a}+\frac{5^3-5}{\mathrm{ch}^2 5a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S6-2>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm0}\frac{2\mathrm{sh}^4a}{3}\left(\frac{2^3-2}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{3^3-3}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{4^3-4}{\mathrm{sh}^2 4a}+\frac{5^3-5}{\mathrm{sh}^2 5a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S6-3>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm0}\frac{16\mathrm{sh}^3a}{7}\left(\frac{1^2}{\mathrm{sh}2a}+\frac{2^2}{\mathrm{sh}4a}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}6a}+\frac{4^2}{\mathrm{sh}8a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S6-4>}$$

◆ $\frac{\pi^3}{32}$極限公式 （L(3)極限公式）

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0} 2\mathrm{sh}^3a\left(\frac{1^2}{\mathrm{ch}2a}+\frac{2^2}{\mathrm{ch}4a}+\frac{3^2}{\mathrm{ch}6a}+\frac{4^2}{\mathrm{ch}8a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S7-1>}$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

これら八つの青色式が得られた。数学アプリケーション Wolfram Alpha での数値検証でも正しいものであった。今回はじめて $\pi^3/32$ 極限公式（つまり L(3) 極限公式）が得られた。

なお、lim での a->+0 は a をプラス側から 0 に近づける意味、a->±0 は a をプラス側、マイナス側どちらから 0 に近づけてもＯＫの意味である

ここで＜Ｓ２－４＞を再掲。

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} \mathrm{sh}^2a\left(\frac{1}{\mathrm{sha}}+\frac{3}{\mathrm{sh}3a}+\frac{5}{\mathrm{sh}5a}+\frac{7}{\mathrm{sh}7a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S2-4>}$$

今回の式の中から上の<Ｓ２－４>の証明を以下に示す。詳細な式変形はとばした。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

<S2－4>の証明

2023 年 7 月に<ゼータの香りの・・（その２９５）>で報告した次の恒等式から出発する。

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}+\frac{3}{\mathrm{sh3a}}+\frac{5}{\mathrm{sh5a}}+\frac{7}{\mathrm{sh7a}}+\cdot\cdot=\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh^2a}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{sh^23a}}+\frac{\mathrm{ch5a}}{\mathrm{sh^25a}}+\frac{\mathrm{ch7a}}{\mathrm{sh^27a}}+\cdot\cdot \qquad \text{----<1>}$$

$$(a>0)$$

両辺に$\mathrm{sh^2a}$を掛けて次を得る（右辺は各項に掛ける）。

$$\mathrm{sh^2a}\left(\frac{1}{\mathrm{sha}}+\frac{3}{\mathrm{sh3a}}+\frac{5}{\mathrm{sh5a}}+\frac{7}{\mathrm{sh7a}}+\cdot\cdot\right)=\frac{\mathrm{sh^2a\cdot cha}}{\mathrm{sh^2a}}+\frac{\mathrm{sh^2a\cdot ch3a}}{\mathrm{sh^23a}}+\frac{\mathrm{sh^2a\cdot ch5a}}{\mathrm{sh^25a}}+\frac{\mathrm{sh^2a\cdot ch7a}}{\mathrm{sh^27a}}+\cdot\cdot$$

上式で a を 0 に（＋側から）近づけると、右辺の各項は 0/0 となるからロピタルの定理を使って式変形を行っていく。ロピタルの定理を２回使って次を得る。

$$\lim_{a\to+0}\mathrm{sh^2a}\left(\frac{1}{\mathrm{sha}}+\frac{3}{\mathrm{sh3a}}+\frac{5}{\mathrm{sh5a}}+\frac{7}{\mathrm{sh7a}}+\cdot\cdot\right)=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdot\cdot$$

ここで右辺は

$1+1/3^2+1/5^2+1/7^2+\cdot\cdot=(1+1/2^2+1/3^2+1/4^2+\cdot\cdot)-(1/2^2+1/4^2+\cdot\cdot)=(3/4)\zeta(2)=\pi^2/8$

となるから、左辺と右辺を逆にして目的の<Ｓ２－４>を得る。

終わり。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

<Ｓ２－４>はこのようにして得られた。他式も類似の方法で得られる。

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●上記の証明を見てもわかるように証明自体は簡単である。

ロピタルの定理と双曲線関数を知っていれば高校生でもできる。私は２年前に<１>を得ていたのに上記の証明には全く気付かなかった。わざわざ $\mathrm{sh^2a}$ を掛けるということ自体が思いつきにくいのでそれは仕方ないが、いったんその方法が会得できれば、あとは次々に極限公式が見つかっていくということになった。

数学はいつもこんな感じである。いったん道が切り開かれれば類似を行ってさまざまな公式が得られていく。

●次の４式を眺めたい。

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}\mathrm{sh^2a}\left(\frac{2}{\mathrm{ch2a}}+\frac{4}{\mathrm{ch4a}}+\frac{6}{\mathrm{ch6a}}+\frac{8}{\mathrm{ch8a}}+\cdot\cdot\right) \qquad \text{----<S1-2>}$$

$$L(2)=\lim_{a\to\pm 0} sh^2a\left(\frac{1}{cha}+\frac{3}{ch3a}+\frac{5}{ch5a}+\frac{7}{ch7a}+\cdot\cdot\right)$$ ----＜S1−3＞

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} sh^2a\left(\frac{2}{sh2a}+\frac{4}{sh4a}+\frac{6}{sh6a}+\frac{8}{sh8a}+\cdot\cdot\right)$$ ----＜S2−3＞

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} sh^2a\left(\frac{1}{sha}+\frac{3}{sh3a}+\frac{5}{sh5a}+\frac{7}{sh7a}+\cdot\cdot\right)$$ ----＜S2−4＞

これらは大変きれいである。美と調和に満ちている。次を考えても意味が深い。

$L(2)=1-1/3^2+1/5^2-1/7^2+-\cdot\cdot$ （カタランの定数）

$\pi^2/8=1+1/3^2+1/5^2+1/7^2+\cdot\cdot$

●以下の二つを眺めたい。

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm 0}\frac{16sh^3a}{7}\left(\frac{1^2}{sh2a}+\frac{2^2}{sh4a}+\frac{3^2}{sh6a}+\frac{4^2}{sh8a}+\cdot\cdot\right)$$ ----＜S6−4＞

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0} 2sh^3a\left(\frac{1^2}{ch2a}+\frac{2^2}{ch4a}+\frac{3^2}{ch6a}+\frac{4^2}{ch8a}+\cdot\cdot\right)$$ ---＜S7−1＞

このニつもすばらしい対比を成している。

$(7/8)\zeta(3)=1+1/3^3+1/5^3+1/7^3+\cdot\cdot$

$L(3)=\pi^3/32=1-1/3^3+1/5^3-1/7^3+-\cdot\cdot$

●前回も見たが、極限公式のふしぎさを数値的に味わいたい。繰り返しになるが、右辺で重要な部分は$(e^a-1)^k$や$(sha)^k$を除いた部分である。

＜Ｓ５－４＞を再掲。

$$\log2=\lim_{a\to\pm 0} sh^2a\left(\frac{1}{ch^2a}+\frac{2}{ch^22a}+\frac{3}{ch^23a}+\frac{4}{ch^24a}+\cdot\cdot\right)$$ ---＜S5−4＞

例えば、この式の場合、sh^2a を除く（$1/ch^2a+2/ch^22a+\cdot\cdot$）の部分が重要である。前回、$sh^2a$ の部分は調整因子と名付けたが、（$1/ch^2a+2/ch^22a+\cdot\cdot$）の方を中心因子と名付けたい。

すなわち、極限公式は

値＝$\lim_{(a\to0)}$調整因子×中心因子

という形になっている。

Wolfram Alpha で上式＜Ｓ５－４＞の近似計算を実行すると、以下となる。

まず $\log2=1-1/2+1/3-1/4+-\cdot\cdot=0.693147180\cdot\cdot$ である。

例えば、a＝0.0001 とすると、

・n＝10^3⇒　右辺値＝0.00498、（$1/ch^2a$ $+2/ch^2 2a$ +・・）＝498006、（sha）^{2}＝1.0000000033×10^−8

・n＝10^4⇒　右辺値＝0.327834、（$1/ch^2a$ $+2/ch^2 2a$ +・・）＝3.27834×10^7、（sha）^{2}＝1.0000000033×10^−8

・n＝10^6⇒　右辺値＝0.693147、（$1/ch^2a$ $+2/ch^2 2a$ +・・）＝6.93147×10^7、（sha）^{2}＝1.0000000033×10^−8

以上。

　　このように右辺値は log2 の値 0.693147180・・にどんどんと近づいていく。
　上記の計算で「重要な部分は$(e^a-1)^k$や$(sha)^k$を除いた部分である。」の意味がわかっていただけたと思う。中心因子が大事であり、調整因子は大きさの調整役にすぎない。

●以下の４式を再掲。

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2sh^3a\left(\frac{1^2}{ch^2a}+\frac{2^2}{ch^2 2a}+\frac{3^2}{ch^2 3a}+\frac{4^2}{ch^2 4a}+\cdot\cdot\right) \quad ---<S3-2>$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} sh^3a\left(\frac{1^2}{sh^2a}+\frac{2^2}{sh^2 2a}+\frac{3^2}{sh^2 3a}+\frac{4^2}{sh^2 4a}+\cdot\cdot\right) \quad ---<S3-3>$$

$$\log 2=\lim_{a\to\pm0} 2sh^2a\left(\frac{1}{ch^2a}+\frac{3}{ch^2 3a}+\frac{5}{ch^2 5a}+\frac{7}{ch^2 7a}+\cdot\cdot\right) \quad ---<S5-3>$$

$$\log 2=\lim_{a\to\pm0} sh^2a\left(\frac{1}{ch^2a}+\frac{2}{ch^2 2a}+\frac{3}{ch^2 3a}+\frac{4}{ch^2 4a}+\cdot\cdot\right) \quad ---<S5-4>$$

　これらを眺めても深いものを感じる。極限公式での規則性というものが出てきているような気がするが、おいおいわかってくると思う。

●証明はわかっても極限公式はふしぎである。どうして右辺の極限が左辺になるのか直感的に把握するのがたいへん困難である。地底の奥底のような未知の領域からこれらの結果が出てきているように感じる。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2025.1.13 杉岡幹生

<参考文献>

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」（Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社）

改訂 rev1.01　L(2)の極限公式＜Ｓ１＞式の書き損じほかを訂正。2025.1.15