＜ 三角関数と双曲線関数の融合域（その２６）＞ rev1.02

新たに極限公式が八つ得られたので下方に青色式で示す。これまでの主要なものと一緒に示した。
なお、前回追加した＜Ｈ３＞は自明な証明に気づき削除とし、それに付随した＜Ｓ２＞も削除した。

以下では、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。a や α は任意の実数であり、よって例えば、$(a \neq 0)$は「a は 0 でない任意の実数」を意味する。
$\tan^{-1}$, th^{-1} はそれぞれ arctan, arctanh である。log は自然対数、e は自然対数の底。

＝＝

＜ 恒等式 ＞

$$\frac{1}{\mathrm{cha}-1}-\frac{1}{\mathrm{sha}}=2\left(\frac{1}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \quad (a>0)$$ -----＜1＞

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}-\frac{1}{\mathrm{cha}+1}=2\left(\frac{1}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \quad (a>0)$$ -----＜2＞

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2(a/2)}=4\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch2a}}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch4a}}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \quad (a\neq 0)$$ -----＜3＞

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^2(a/2)}=4\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{ch2a}}{\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{ch4a}}{\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha}}+-\cdot\cdot\right) \quad (a\neq 0)$$ ----＜4＞

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}=2\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+-\cdot\cdot\right) \quad (a\neq 0)$$ -----＜5＞

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}=2\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \quad (a\neq 0)$$ -----＜6＞

$$\frac{1}{e^{a}-1}=\left(\frac{\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}a}-1\right)-\left(\frac{\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}a}-1\right)+\left(\frac{\mathrm{sh}6a}{\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}a}-1\right)-\left(\frac{\mathrm{sh}8a}{\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}a}-1\right)+-\cdot\cdot \quad \text{--<7-1>}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{e^{a}+1}=\left(1-\frac{\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a}\right)-\left(1-\frac{\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}4a+\mathrm{ch}a}\right)+\left(1-\frac{\mathrm{sh}6a}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a}\right)-\left(1-\frac{\mathrm{sh}8a}{\mathrm{ch}8a+\mathrm{ch}a}\right)+-\cdot\cdot \quad \text{--<7-2>}$$

$$(a>0)$$

$$\mathrm{th}\left(\frac{a}{2}\right)=\left(\frac{\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}8a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}a}\right)\cdot\cdot \quad \text{----<E1>}$$

$$(a>0)$$

$$\mathrm{th}\left(\frac{a}{2}\right)=\left(\frac{\mathrm{sh}2a-\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}2a+\mathrm{sh}a}\right)\left(\frac{\mathrm{sh}4a-\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}4a+\mathrm{sh}a}\right)\left(\frac{\mathrm{sh}6a-\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}6a+\mathrm{sh}a}\right)\left(\frac{\mathrm{sh}8a-\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}8a+\mathrm{sh}a}\right)\cdot\cdot \quad \text{----<E2>}$$

$$(a>0)$$

$$1-\frac{1}{e^{2a}}=\left(\frac{e^{2a}(\mathrm{th}2a-\mathrm{th}a)}{\mathrm{th}2a+\mathrm{th}a}\right)\left(\frac{e^{2a}(\mathrm{th}4a-\mathrm{th}a)}{\mathrm{th}4a+\mathrm{th}a}\right)\left(\frac{e^{2a}(\mathrm{th}6a-\mathrm{th}a)}{\mathrm{th}6a+\mathrm{th}a}\right)\left(\frac{e^{2a}(\mathrm{th}8a-\mathrm{th}a)}{\mathrm{th}8a+\mathrm{th}a}\right)\cdot\cdot \quad \text{--<E3>}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^{2}(a/2)}=4\mathrm{sh}a\left(\frac{\mathrm{sh}2a}{(\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}a)^{2}}+\frac{\mathrm{sh}4a}{(\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}a)^{2}}+\frac{\mathrm{sh}6a}{(\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}a)^{2}}+\frac{\mathrm{sh}8a}{(\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}a)^{2}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---<G1>}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^{2}(a/2)}=4\mathrm{sh}a\left(\frac{\mathrm{sh}2a}{(\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a)^{2}}+\frac{\mathrm{sh}4a}{(\mathrm{ch}4a+\mathrm{ch}a)^{2}}+\frac{\mathrm{sh}6a}{(\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a)^{2}}+\frac{\mathrm{sh}8a}{(\mathrm{ch}8a+\mathrm{ch}a)^{2}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---<G2>}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{ch}a}+\frac{1}{3\mathrm{ch}3a}+\frac{1}{5\mathrm{ch}5a}+\frac{1}{7\mathrm{ch}7a}+\cdot\cdot$$

$$=\log\left(\left(\frac{\mathrm{sh}2a+\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}2a-\mathrm{sh}a}\right)\left(\frac{\mathrm{sh}6a+\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}6a-\mathrm{sh}a}\right)\left(\frac{\mathrm{sh}10a+\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}10a-\mathrm{sh}a}\right)\left(\frac{\mathrm{sh}14a+\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}14a-\mathrm{sh}a}\right)\cdot\cdot\right) \quad \text{----<H1>}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}+\frac{1}{3\mathrm{sh}3\mathrm{a}}+\frac{1}{5\mathrm{sh}5\mathrm{a}}+\frac{1}{7\mathrm{sh}7\mathrm{a}}+\cdot\cdot$$

$$=\log\left(\left(\frac{\mathrm{ch}2\mathrm{a}+\mathrm{cha}}{\mathrm{ch}2\mathrm{a}-\mathrm{cha}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}6\mathrm{a}+\mathrm{cha}}{\mathrm{ch}6\mathrm{a}-\mathrm{cha}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}10\mathrm{a}+\mathrm{cha}}{\mathrm{ch}10\mathrm{a}-\mathrm{cha}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}14\mathrm{a}+\mathrm{cha}}{\mathrm{ch}14\mathrm{a}-\mathrm{cha}}\right)\cdot\cdot\right)$$ ----＜H2＞

（$a>0$）

$$\frac{1}{e^{a}-\alpha}-\frac{3}{e^{3a}-\alpha}+\frac{5}{e^{5a}-\alpha}-\frac{7}{e^{7a}-\alpha}+-\cdot\cdot$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\mathrm{sha}}{(\mathrm{cha})^2}+\frac{\alpha\mathrm{sh}2\mathrm{a}}{(\mathrm{ch}2\mathrm{a})^2}+\frac{\alpha^2\mathrm{sh}3\mathrm{a}}{(\mathrm{ch}3\mathrm{a})^2}+\frac{\alpha^3\mathrm{sh}4\mathrm{a}}{(\mathrm{ch}4\mathrm{a})^2}+\cdot\cdot\right)$$ ----＜P1－3＞

（$|\alpha|<e^{a}$ 且つ $a>0$）

$$\frac{\alpha\mathrm{sha}}{(\mathrm{cha})^2}+\frac{\alpha^2\mathrm{sh}2\mathrm{a}}{2(\mathrm{ch}2\mathrm{a})^2}+\frac{\alpha^3\mathrm{sh}3\mathrm{a}}{3(\mathrm{ch}3\mathrm{a})^2}+\frac{\alpha^4\mathrm{sh}4\mathrm{a}}{4(\mathrm{ch}4\mathrm{a})^2}+\cdot\cdot$$

$$=2\log\left((1-\alpha e^{-a})^{-1}(1-\alpha e^{-3a})^{3}(1-\alpha e^{-5a})^{-5}(1-\alpha e^{-7a})^{7}(1-\alpha e^{-9a})^{-9}(1-\alpha e^{-11a})^{11}\cdot\cdot\right)$$ -＜P1－4＞

（$|\alpha|<e^{a}$ 且つ $a>0$）

$$\left((1-\alpha e^{-2a})(1-\alpha e^{-6a})^{1/3}(1-\alpha e^{-10a})^{1/5}(1-\alpha e^{-14a})^{1/7}(1-\alpha e^{-18a})^{1/9}\cdot\cdot\right)^{2}$$

$$=(\mathrm{tha})^{\alpha}(\mathrm{th}2\mathrm{a})^{\alpha^2/2}(\mathrm{th}3\mathrm{a})^{\alpha^3/3}(\mathrm{th}4\mathrm{a})^{\alpha^4/4}(\mathrm{th}5\mathrm{a})^{\alpha^5/5}(\mathrm{th}6\mathrm{a})^{\alpha^6/6}\cdot\cdot$$ --＜P2＞

（$|\alpha|\leqq 1$ 且つ $a>0$）

$$\frac{1}{e^{2a}-\alpha}+\frac{2}{e^{4a}-\alpha}+\frac{3}{e^{6a}-\alpha}+\frac{4}{e^{8a}-\alpha}+\cdot\cdot=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{(\mathrm{sha})^2}+\frac{\alpha}{(\mathrm{sh}2\mathrm{a})^2}+\frac{\alpha^2}{(\mathrm{sh}3\mathrm{a})^2}+\frac{\alpha^3}{(\mathrm{sh}4\mathrm{a})^2}+\cdot\cdot\right)$$ --＜Q＞

（$|\alpha|<e^{a}$ 且つ $a>0$）

$$\frac{\alpha}{e^{a}-1}+\frac{\alpha^2}{2(e^{2a}-1)}+\frac{\alpha^3}{3(e^{3a}-1)}+\frac{\alpha^4}{4(e^{4a}-1)}+\cdot\cdot$$

$$=\log\left(\frac{1}{(1-\alpha e^{-a})(1-\alpha e^{-2a})(1-\alpha e^{-3a})(1-\alpha e^{-4a})\cdot\cdot}\right)$$ ----＜Q1＞

（$|\alpha|<e^{a}$ 且つ $a>0$）

［＜Q１＞でのα＝1 のケース ］

$$\frac{1}{(e^{a}-1)}+\frac{1}{2(e^{2a}-1)}+\frac{1}{3(e^{3a}-1)}+\frac{1}{4(e^{4a}-1)}+\cdot\cdot$$
$$=\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-2a})(1-e^{-3a})(1-e^{-4a})\cdot\cdot}\right) \quad \text{----<Q1-2>}$$
$(a>0)$

$$\frac{\alpha}{(sha)^2}+\frac{\alpha^2}{2(sh2a)^2}+\frac{\alpha^3}{3(sh3a)^2}+\frac{\alpha^4}{4(sh4a)^2}+\cdot\cdot$$
$$=4\log\left(\frac{1}{(1-\alpha e^{-2a})(1-\alpha e^{-4a})^2(1-\alpha e^{-6a})^3(1-\alpha e^{-8a})^4\cdot\cdot}\right) \quad \text{----<Q1-3>}$$
$(|\alpha|<e^{2a}$ 且つ $a>0)$

$$\frac{\alpha}{(cha)^2}+\frac{\alpha^2}{2(ch2a)^2}+\frac{\alpha^3}{3(ch3a)^2}+\frac{\alpha^4}{4(ch4a)^2}+\cdot\cdot$$
$$=4\log\left((1-\alpha e^{-2a})^{-1}(1-\alpha e^{-4a})^2(1-\alpha e^{-6a})^{-3}(1-\alpha e^{-8a})^4(1-\alpha e^{-10a})^{-5}(1-\alpha e^{-12a})^6\cdot\cdot\right) \quad \text{--<R1>}$$
$(-e^{2a}\leqq \alpha<e^{2a}$ 且つ $a>0)$

＜ 極限公式 ＞

◆$\sqrt{2}$ 極限公式

$$\sqrt{2}=\lim_{a\to+0}(1+e^{-a})(1+e^{-3a})^{-1}(1+e^{-5a})(1+e^{-7a})^{-1}(1+e^{-9a})(1+e^{-11a})^{-1}\cdot\cdot \quad \text{---<N1-2>}$$

$$\sqrt{2}=\lim_{a\to+0}(1+e^{-a})(1+e^{-2a})^{-1}(1+e^{-3a})(1+e^{-4a})^{-1}(1+e^{-5a})(1+e^{-6a})^{-1}\cdot\cdot \quad \text{---<P1-4>}$$

◆$2^{1/4}$極限公式

$$2^{1/4}=\lim_{a\to+0}(1+e^{-a})(1+e^{-2a})^{-2}(1+e^{-3a})^{3}(1+e^{-4a})^{-4}(1+e^{-5a})^{5}(1+e^{-6a})^{-6}\cdot\cdot \quad \text{---<R2>}$$

◆L(2)極限公式

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0} sha\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{sha}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{sh3a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{sh5a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{sh7a}\right)+\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S1>}$$

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}(\mathrm{sha})^2\left(\frac{2}{\mathrm{ch}2a}+\frac{4}{\mathrm{ch}4a}+\frac{6}{\mathrm{ch}6a}+\frac{8}{\mathrm{ch}8a}+\cdot\ \cdot\right)$$ ----<S1−2>

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}(\mathrm{sha})^2\left(\frac{1}{\mathrm{cha}}+\frac{3}{\mathrm{ch}3a}+\frac{5}{\mathrm{ch}5a}+\frac{7}{\mathrm{ch}7a}+\cdot\ \cdot\right)$$ ----<S1−3>

◆$\frac{\pi^2}{8}$極限公式

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}(e^a-1)\log\left(1/(\mathrm{tha}\cdot\mathrm{th}2a\cdot\mathrm{th}3a\cdot\mathrm{th}4a\cdot\ \cdot)\right)$$ ----<S2−1>

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}2a\cdot\log\left(1/(\mathrm{tha}\cdot\mathrm{th}3a\cdot\mathrm{th}5a\cdot\mathrm{th}7a\cdot\ \cdot)\right)$$ ----<S2−2>

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}(\mathrm{sha})^2\left(\frac{2}{\mathrm{sh}2a}+\frac{4}{\mathrm{sh}4a}+\frac{6}{\mathrm{sh}6a}+\frac{8}{\mathrm{sh}8a}+\cdot\ \cdot\right)$$ ----<S2−3>

◆$\frac{\pi^2}{6}$極限公式

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}(1-e^a)\log\left((1-e^{-a})(1-e^{-2a})(1-e^{-3a})(1-e^{-4a})\cdot\ \cdot\right)$$ ----<S3>

◆$\frac{\pi}{4}$極限公式

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}((e^a-1)/2)\left(\frac{1}{\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch}2a}+\frac{1}{\mathrm{ch}3a}+\frac{1}{\mathrm{ch}4a}+\cdot\ \cdot\right)$$ ----<S4−1>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}\mathrm{sha}\left(\frac{1}{\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch}3a}+\frac{1}{\mathrm{ch}5a}+\frac{1}{\mathrm{ch}7a}+\cdot\ \cdot\right)$$ ----<S4−2>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}(\mathrm{sha})^2\left(\frac{2\mathrm{sh}2a}{(\mathrm{ch}2a)^2}+\frac{4\mathrm{sh}4a}{(\mathrm{ch}4a)^2}+\frac{6\mathrm{sh}6a}{(\mathrm{ch}6a)^2}+\frac{8\mathrm{sh}8a}{(\mathrm{ch}8a)^2}+\cdot\ \cdot\right)$$ ---<S4−3>

◆log2 極限公式

$$\log2=\lim_{a\to+0}(e^a-1)\left(\frac{1}{e^a+1}+\frac{1}{e^{2a}+1}+\frac{1}{e^{3a}+1}+\frac{1}{e^{4a}+1}+\cdot\ \cdot\right)$$ ----<S5−1>

$$\log 2=\lim_{a\to+0} 2(e^a-1)\left(\frac{1}{e^a+1}+\frac{1}{e^{3a}+1}+\frac{1}{e^{5a}+1}+\frac{1}{e^{7a}+1}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S5-2>}$$

◆ζ(3)極限公式

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}(16(e^a-1)^2/7)\log\left(1/(\mathrm{th}2a(\mathrm{th}3a)^2(\mathrm{th}4a)^3(\mathrm{th}5a)^4\cdot\cdot)\right) \quad \text{---<S6-1>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm0}(8(\mathrm{sh}a)^4/9)\left(\frac{2^3-2}{(\mathrm{ch}2a)^2}+\frac{3^3-3}{(\mathrm{ch}3a)^2}+\frac{4^3-4}{(\mathrm{ch}4a)^2}+\frac{5^3-5}{(\mathrm{ch}5a)^2}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S6-2>}$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

これら八つの青色式が得られた。Wolfram Alpha での数値検証でも正しいものであった。今回はじめて log2 式とζ(3)式が得られた。lim での a->+0 は a をプラス側から 0 に近づけるの意味、a->±0 は a をプラス側からでもマイナス側からでもどちらから 0 に近づけてもＯＫの意味である

なお、L(2)はL(2)＝1 $-1/3^2+1/5^2-1/7^2$ +-・・である。

ζ(3)はζ(3)＝1 $+1/2^3+1/3^3+1/4^3$ +・である。

π/4 はL(1)そのものである。$\pi^2/6$ や $\pi^2/8$ はζ(2)に関係し、前者はζ(2)、後者は(3/4)ζ(2)である。

Wolfram Alpha での検証を行っていると、極限公式の裏側にひそむ性質というものが少しずつ見えてきた。右辺の中でもっとも重要なものは、$(e^a-1)^k$ や $(\mathrm{sha})^k$ を除いた部分である。

例えば、次式では $(\mathrm{sha})^4$ を除いた $(8/9)\left(\frac{2^3-2}{(\mathrm{ch}2a)^2}+\frac{3^3-3}{(\mathrm{ch}3a)^2}+\cdot\cdot\right)$ が重要となる。$(\mathrm{sha})^4$ は単なる大きさの調整役にすぎない。そこで、$(e^a-1)^k$ や $(\mathrm{sha})^k$ を調整因子と名付ける。

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm0}(8(\mathrm{sha})^4/9)\left(\frac{2^3-2}{(\mathrm{ch}2a)^2}+\frac{3^3-3}{(\mathrm{ch}3a)^2}+\frac{4^3-4}{(\mathrm{ch}4a)^2}+\frac{5^3-5}{(\mathrm{ch}5a)^2}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S6-2>}$$

今回の式の中から上の＜Ｓ６－２＞の証明を以下に示す。詳細な式変形はとばした。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜S6－2＞の証明

2023 年に＜ゼータの香りの・・（その２８９）＞で報告した次の恒等式から出発する。

$$2\left(\frac{2^3-2}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{3^3-3}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{4^3-4}{\mathrm{ch}^2 4a}+\frac{5^3-5}{\mathrm{ch}^2 5a}+\cdot\cdot\right)=3\left(\frac{1}{\mathrm{sh}^4 a}-\frac{2}{\mathrm{sh}^4 2a}+\frac{3}{\mathrm{sh}^4 3a}-\frac{4}{\mathrm{sh}^4 4a}+-\cdot\cdot\right) \quad \text{---L}$$

この両辺に sh^4a を掛けて次を得る（右辺は各項に掛ける）。

$$2\mathrm{sh}^4a\left(\frac{2^3-2}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{3^3-3}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{4^3-4}{\mathrm{ch}^2 4a}+\frac{5^3-5}{\mathrm{ch}^2 5a}+\cdot\cdot\right)=3\left(\frac{\mathrm{sh}^4a}{\mathrm{sh}^4a}-\frac{2\mathrm{sh}^4a}{\mathrm{sh}^4 2a}+\frac{3\mathrm{sh}^4a}{\mathrm{sh}^4 3a}-\frac{4\mathrm{sh}^4a}{\mathrm{sh}^4 4a}+-\cdot\cdot\right) \quad \text{--L-2}$$

上式で a を 0 に近づけると、右辺の各項は 0/0 となるからロピタルの定理を適用して式変形を行っていく。ロピタルの定理を４回使って次を得る。

$$\lim_{a\to\pm 0} 2\mathrm{sh}^4a\left(\frac{2^3-2}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{3^3-3}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{4^3-4}{\mathrm{ch}^2 4a}+\frac{5^3-5}{\mathrm{ch}^2 5a}+\cdot\cdot\right)=3\left(1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^3}+-\cdot\cdot\right) \quad \text{--L-3}$$

右辺の(～)に関し

$1-1/2^3+1/3^3-1/4^3+-\cdot\cdot=(1+1/2^3+1/3^3+1/4^3+\cdot\cdot)-2(1/2^3+1/4^3+1/6^3+\cdot\cdot)=(3/4)\zeta(3)$

となるから、左辺と右辺を逆にして整理して、目的の＜Ｓ６－２＞を得る。

終わり。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜Ｓ６－２＞はこのようにして得られた。他式も類似の方法で得られる。

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●今回の式はどれも面白いが、まず下記三式を眺めたい。

$$L(2)=\lim_{a\to\pm 0}(\mathrm{sha})^2\left(\frac{2}{\mathrm{ch}2a}+\frac{4}{\mathrm{ch}4a}+\frac{6}{\mathrm{ch}6a}+\frac{8}{\mathrm{ch}8a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S1-2>}$$

$$L(2)=\lim_{a\to\pm 0}(\mathrm{sha})^2\left(\frac{1}{\mathrm{cha}}+\frac{3}{\mathrm{ch}3a}+\frac{5}{\mathrm{ch}5a}+\frac{7}{\mathrm{ch}7a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S1-3>}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to +0}(\mathrm{sha})^2\left(\frac{2}{\mathrm{sh}2a}+\frac{4}{\mathrm{sh}4a}+\frac{6}{\mathrm{sh}6a}+\frac{8}{\mathrm{sh}8a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S2-3>}$$

これらは簡明にして神秘的である。 証明はできても、どうしてこんなことが成り立つのかわからない感じである。霧の向こうに未知の領域が広がっている気がする・・

● ２年前に私は恒等式を多く導いたが、あまりにたくさん出たので報告したのはそのごく一部であった。面白い式であると思っていたが、面白いだけでそれからなにか出るとは思っていなかった。散発的かつ興味ある式と思っていた。＜ゼータの香りの・・（その２８９）＞でも一部を示している。

ところが、最近それらのうち１／４ほどの割合の式が極限公式へと移行できることに気づいた。そしてそれら過去の恒等式を利用することで極限公式が続々と出始めたのだが、これらはふしぎな性質をもっている。

●log2 極限公式の一つを再掲。

$$\log 2 = \lim_{a\to +0}(e^a - 1)\left(\frac{1}{e^a+1} + \frac{1}{e^{2a}+1} + \frac{1}{e^{3a}+1} + \frac{1}{e^{4a}+1} + \cdot\cdot\right) \quad \text{----<S5-1>}$$

　この式の右辺の$(e^a - 1)\left(\frac{1}{e^a+1} + \frac{1}{e^{2a}+1} + \frac{1}{e^{3a}+1} + \frac{1}{e^{4a}+1} + \cdot\cdot\right)$を展開すると、次のようになった。

$(e^a-1)(1/(e^a+1)+ 1/(e^{2a}+1)+\cdot\cdot)$

$=1 +e^{-a} -2e^{-2a} -e^{-3a} +3e^{-4a} -2e^{-5a} +2e^{-6a} -4e^{-7a} +\cdot\cdot$

　これらの展開係数列は大事な意味をもっていると思う。

●次の二式を再掲。

$$L(2) = \lim_{a\to\pm 0}(\mathrm{sha})^2\left(\frac{2}{\mathrm{ch}2a} + \frac{4}{\mathrm{ch}4a} + \frac{6}{\mathrm{ch}6a} + \frac{8}{\mathrm{ch}8a} + \cdot\cdot\right) \quad \text{----<S1-2>}$$

$$L(2) = \lim_{a\to\pm 0}(\mathrm{sha})^2\left(\frac{1}{\mathrm{cha}} + \frac{3}{\mathrm{ch}3a} + \frac{5}{\mathrm{ch}5a} + \frac{7}{\mathrm{ch}7a} + \cdot\cdot\right) \quad \text{----<S1-3>}$$

　眺めるだけで不可思議な感覚にとらわれるが、たしかに成り立っている。繰り返しになるが、右辺で重要な部分は$(\mathrm{sha})^2$を除いた（2/ch2a +・・）や(1/cha +・・)である。

　数学アプリケーション Wolfram Alpha でそのふしぎさを味わってみると、以下となる。

　　まずＬ(2)＝$1 -1/3^2 +1/5^2 -1/7^2$ +-・・＝0.915965594・・である。

　　＜Ｓ１－２＞を調べる。

例えば、a＝0.001 とすると、

・n＝100⇒　右辺値＝0.09999915、（2/ch2a +・・）＝99999.12、（sha)^2＝1.00000033×10^−6

・n＝1000⇒　右辺値＝0.51213417、（2/ch2a +・・）＝512134、（sha)^2＝1.00000033×10^−6

・n＝10000⇒　右辺値＝0.91596531、（2/ch2a +・・）＝915965、（sha)^2＝1.00000033×10^−6

以上。

　このように右辺値はＬ(2)の値 0.915965594・・にどんどんと近づいていく。

上記の（2/ch2a +・・）と(sha)^{2}の値から私が「重要な部分は(sha)^{2}を除いた（2/ch2a +・・）である！」と述べた意味が分かっていただけると思う。とにかくふしぎである。

　　極限公式の裏側には巨大ななにかがひそんでいると思う。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2025.1.11 杉岡幹生

＜参考文献＞

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)

[rev1.01　改訂] ＜Ｓ１－３＞式の書き損じを訂正。2025.1.12

[rev1.02　改訂] Ｌ(2)極限公式の＜Ｓ１＞式の書き損じほかを訂正。2025.1.15