＜ 三角関数と双曲線関数の融合域（その２５）＞ rev1.01

新たに恒等式一つと極限公式四つが得られたので下方に青色式で示す。これまでの主要なものと一緒に示した。

以下では、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。a や α は任意の実数であり、よって例えば、$(a \neq 0)$は「a は 0 でない任意の実数」を意味する。$\tan^{-1}$, th^{-1} はそれぞれ arctan, arctanh である。log は自然対数、e は自然対数の底。

＝＝

＜ 恒等式 ＞

$$\frac{1}{\mathrm{cha}-1}-\frac{1}{\mathrm{sha}}=2\left(\frac{1}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----<1>}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}-\frac{1}{\mathrm{cha}+1}=2\left(\frac{1}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----<2>}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2(a/2)}=4\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch2a}}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch4a}}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----<3>}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^2(a/2)}=4\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{ch2a}}{\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{ch4a}}{\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha}}+-\cdot\cdot\right) \quad \text{----<4>}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}=2\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+-\cdot\cdot\right) \quad \text{-----<5>}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}=2\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----<6>}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\frac{1}{e^{a}-1}=\left(\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}-1\right)-\left(\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}-1\right)+\left(\frac{\mathrm{sh6a}}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}-1\right)-\left(\frac{\mathrm{sh8a}}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}-1\right)+-\cdot\cdot \quad \text{--<7-1>}$$

$(a>0)$

$$\frac{1}{e^a+1}=\left(1-\frac{sh2a}{ch2a+cha}\right)-\left(1-\frac{sh4a}{ch4a+cha}\right)+\left(1-\frac{sh6a}{ch6a+cha}\right)-\left(1-\frac{sh8a}{ch8a+cha}\right)+-\cdot\cdot \text{ --}\langle 7\text{-}2\rangle$$

$(a>0)$

$$th\left(\frac{a}{2}\right)=\left(\frac{ch2a-cha}{ch2a+cha}\right)\left(\frac{ch4a+cha}{ch4a-cha}\right)\left(\frac{ch6a-cha}{ch6a+cha}\right)\left(\frac{ch8a+cha}{ch8a-cha}\right)\cdot\cdot \text{ ----}\langle E1\rangle$$

$(a>0)$

$$th\left(\frac{a}{2}\right)=\left(\frac{sh2a-sha}{sh2a+sha}\right)\left(\frac{sh4a-sha}{sh4a+sha}\right)\left(\frac{sh6a-sha}{sh6a+sha}\right)\left(\frac{sh8a-sha}{sh8a+sha}\right)\cdot\cdot \text{ ----}\langle E2\rangle$$

$(a>0)$

$$1-\frac{1}{e^{2a}}=\left(\frac{e^{2a}(th2a-tha)}{th2a+tha}\right)\left(\frac{e^{2a}(th4a-tha)}{th4a+tha}\right)\left(\frac{e^{2a}(th6a-tha)}{th6a+tha}\right)\left(\frac{e^{2a}(th8a-tha)}{th8a+tha}\right)\cdot\cdot \quad --\langle E3\rangle$$

$(a>0)$

$$\frac{1}{sh^2(a/2)}=4sha\left(\frac{sh2a}{(ch2a-cha)^2}+\frac{sh4a}{(ch4a-cha)^2}+\frac{sh6a}{(ch6a-cha)^2}+\frac{sh8a}{(ch8a-cha)^2}+\cdot\cdot\right) \text{ ---}\langle G1\rangle$$

$(a\neq 0)$

$$\frac{1}{ch^2(a/2)}=4sha\left(\frac{sh2a}{(ch2a+cha)^2}+\frac{sh4a}{(ch4a+cha)^2}+\frac{sh6a}{(ch6a+cha)^2}+\frac{sh8a}{(ch8a+cha)^2}+\cdot\cdot\right) \text{ ---}\langle G2\rangle$$

$(a\neq 0)$

$$\frac{1}{cha}+\frac{1}{3ch3a}+\frac{1}{5ch5a}+\frac{1}{7ch7a}+\cdot\cdot$$

$$=\log\left(\left(\frac{sh2a+sha}{sh2a-sha}\right)\left(\frac{sh6a+sha}{sh6a-sha}\right)\left(\frac{sh10a+sha}{sh10a-sha}\right)\left(\frac{sh14a+sha}{sh14a-sha}\right)\cdot\cdot\right) \text{ ----}\langle H1\rangle$$

$(a\neq 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}+\frac{1}{3\mathrm{sh}3a}+\frac{1}{5\mathrm{sh}5a}+\frac{1}{7\mathrm{sh}7a}+\cdot\cdot$$

$$=\log\left(\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\mathrm{cha}}{\mathrm{ch}2a-\mathrm{cha}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}6a+\mathrm{cha}}{\mathrm{ch}6a-\mathrm{cha}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}10a+\mathrm{cha}}{\mathrm{ch}10a-\mathrm{cha}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}14a+\mathrm{cha}}{\mathrm{ch}14a-\mathrm{cha}}\right)\cdot\cdot\right)$$ ----<H2>

$(a>0)$

$$\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sha}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{sh}3a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}5a}{\mathrm{sh}5a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}7a}{\mathrm{sh}7a}\right)\cdot\cdot$$

$$=\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\mathrm{ch}2a}{\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}2a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}12a+\mathrm{ch}2a}{\mathrm{ch}12a-\mathrm{ch}2a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}20a+\mathrm{ch}2a}{\mathrm{ch}20a-\mathrm{ch}2a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}28a+\mathrm{ch}2a}{\mathrm{ch}28a-\mathrm{ch}2a}\right)\cdot\cdot$$ ----<H3>

$(a>0)$

$$\frac{1}{e^{a}-\alpha}-\frac{3}{e^{3a}-\alpha}+\frac{5}{e^{5a}-\alpha}-\frac{7}{e^{7a}-\alpha}+-\cdot\cdot$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\mathrm{sha}}{(\mathrm{cha})^2}+\frac{\alpha\,\mathrm{sh}2a}{(\mathrm{ch}2a)^2}+\frac{\alpha^2\mathrm{sh}3a}{(\mathrm{ch}3a)^2}+\frac{\alpha^3\mathrm{sh}4a}{(\mathrm{ch}4a)^2}+\cdot\cdot\right)$$ ----<P1−3>

($|\alpha|<e^{a}$ 且つ $a>0$)

$$\frac{\alpha\,\mathrm{sha}}{(\mathrm{cha})^2}+\frac{\alpha^2\mathrm{sh}2a}{2(\mathrm{ch}2a)^2}+\frac{\alpha^3\mathrm{sh}3a}{3(\mathrm{ch}3a)^2}+\frac{\alpha^4\mathrm{sh}4a}{4(\mathrm{ch}4a)^2}+\cdot\cdot$$

$$=2\log\left((1-\alpha e^{-a})^{-1}(1-\alpha e^{-3a})^{3}(1-\alpha e^{-5a})^{-5}(1-\alpha e^{-7a})^{7}(1-\alpha e^{-9a})^{-9}(1-\alpha e^{-11a})^{11}\cdot\cdot\right)$$ -<P1−4>

($|\alpha|<e^{a}$ 且つ $a>0$)

$$\left((1-\alpha e^{-2a})(1-\alpha e^{-6a})^{1/3}(1-\alpha e^{-10a})^{1/5}(1-\alpha e^{-14a})^{1/7}(1-\alpha e^{-18a})^{1/9}\cdot\cdot\right)^2$$

$$=(\mathrm{tha})^{\alpha}(\mathrm{th}2a)^{\alpha^2/2}(\mathrm{th}3a)^{\alpha^3/3}(\mathrm{th}4a)^{\alpha^4/4}(\mathrm{th}5a)^{\alpha^5/5}(\mathrm{th}6a)^{\alpha^6/6}\cdot\cdot$$ --<P2>

($|\alpha|\leqq 1$ 且つ $a>0$)

$$\frac{1}{e^{2a}-\alpha}+\frac{2}{e^{4a}-\alpha}+\frac{3}{e^{6a}-\alpha}+\frac{4}{e^{8a}-\alpha}+\cdot\cdot=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{(\mathrm{sha})^2}+\frac{\alpha}{(\mathrm{sh}2a)^2}+\frac{\alpha^2}{(\mathrm{sh}3a)^2}+\frac{\alpha^3}{(\mathrm{sh}4a)^2}+\cdot\cdot\right)$$ --<Q>

($|\alpha|<e^{a}$ 且つ $a>0$)

$$\frac{\alpha}{e^{a}-1}+\frac{\alpha^2}{2(e^{2a}-1)}+\frac{\alpha^3}{3(e^{3a}-1)}+\frac{\alpha^4}{4(e^{4a}-1)}+\cdot\cdot$$
$$=\log\left(\frac{1}{(1-\alpha e^{-a})(1-\alpha e^{-2a})(1-\alpha e^{-3a})(1-\alpha e^{-4a})\cdot\cdot}\right)$$ ----＜Q1＞

（$|\alpha|<e^{a}$ 且つ $a>0$）

［＜Q１＞でのα＝1 のケース ］

$$\frac{1}{(e^{a}-1)}+\frac{1}{2(e^{2a}-1)}+\frac{1}{3(e^{3a}-1)}+\frac{1}{4(e^{4a}-1)}+\cdot\cdot$$
$$=\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-2a})(1-e^{-3a})(1-e^{-4a})\cdot\cdot}\right)$$ ----＜Q1－2＞

$(a>0)$

$$\frac{\alpha}{(\mathrm{sh}a)^2}+\frac{\alpha^2}{2(\mathrm{sh}2a)^2}+\frac{\alpha^3}{3(\mathrm{sh}3a)^2}+\frac{\alpha^4}{4(\mathrm{sh}4a)^2}+\cdot\cdot$$
$$=4\log\left(\frac{1}{(1-\alpha e^{-2a})(1-\alpha e^{-4a})^2(1-\alpha e^{-6a})^3(1-\alpha e^{-8a})^4\cdot\cdot}\right)$$ ----＜Q1－3＞

（$|\alpha|<e^{2a}$ 且つ $a>0$）

$$\frac{\alpha}{(\mathrm{ch}a)^2}+\frac{\alpha^2}{2(\mathrm{ch}2a)^2}+\frac{\alpha^3}{3(\mathrm{ch}3a)^2}+\frac{\alpha^4}{4(\mathrm{ch}4a)^2}+\cdot\cdot$$
$$=4\log\left((1-\alpha e^{-2a})^{-1}(1-\alpha e^{-4a})^{2}(1-\alpha e^{-6a})^{-3}(1-\alpha e^{-8a})^{4}(1-\alpha e^{-10a})^{-5}(1-\alpha e^{-12a})^{6}\cdot\cdot\right)$$ --＜R1＞

（$-e^{2a}\leqq\alpha<e^{2a}$ 且つ $a>0$）

＜ 公式 ＞

◆√2 極限公式

$$\sqrt{2}=\lim_{a\to+0}(1+e^{-a})(1+e^{-3a})^{-1}(1+e^{-5a})(1+e^{-7a})^{-1}(1+e^{-9a})(1+e^{-11a})^{-1}\cdot\cdot$$ ---＜N1-2＞

◆√2 極限公式（別バージョン）

$$\sqrt{2}=\lim_{a\to+0}(1+e^{-a})(1+e^{-2a})^{-1}(1+e^{-3a})(1+e^{-4a})^{-1}(1+e^{-5a})(1+e^{-6a})^{-1}\cdot\cdot$$ ---＜P1-4＞

◆$2^{1/4}$極限公式

$$2^{1/4}=\lim_{a\to+0}(1+e^{-a})(1+e^{-2a})^{-2}(1+e^{-3a})^{3}(1+e^{-4a})^{-4}(1+e^{-5a})^{5}(1+e^{-6a})^{-6}\cdot\cdot$$ ---＜R2＞

◆L(2)極限公式

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}\mathrm{sha}\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sha}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh3a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh5a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh7a}}\right)+\cdot\cdot\right)\qquad \text{---＜S1＞}$$

◆$\frac{\pi^2}{8}$極限公式

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}\mathrm{sha}\cdot\log\left(\left(\frac{\mathrm{ch2a+cha}}{\mathrm{ch2a-cha}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch6a+cha}}{\mathrm{ch6a-cha}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch10a+cha}}{\mathrm{ch10a-cha}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch14a+cha}}{\mathrm{ch14a-cha}}\right)\cdot\cdot\right)\qquad \text{----＜S2＞}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}(e^a-1)\log\left(1/(\mathrm{tha}\cdot\mathrm{th2a}\cdot\mathrm{th3a}\cdot\mathrm{th4a}\cdot\cdot)\right)\qquad \text{----＜S2−1＞}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh2a}\cdot\log\left(1/(\mathrm{tha}\cdot\mathrm{th3a}\cdot\mathrm{th5a}\cdot\mathrm{th7a}\cdot\cdot)\right)\qquad \text{----＜S2−2＞}$$

◆$\frac{\pi^2}{6}$極限公式

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}(1-e^a)\log\left((1-e^{-a})(1-e^{-2a})(1-e^{-3a})(1-e^{-4a})\cdot\cdot\right)\qquad \text{----＜S3＞}$$

◆$\frac{\pi}{4}$極限公式

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}((e^a-1)/2)\left(\frac{1}{\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch2a}}+\frac{1}{\mathrm{ch3a}}+\frac{1}{\mathrm{ch4a}}+\cdot\cdot\right)\qquad \text{----＜S4−1＞}$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}\mathrm{sha}\left(\frac{1}{\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch3a}}+\frac{1}{\mathrm{ch5a}}+\frac{1}{\mathrm{ch7a}}+\cdot\cdot\right)\qquad \text{----＜S4−2＞}$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

これら五つの青色式が得られた。＜Ｈ３＞は一変数の恒等式となっている。いずれの式も Excel や Wolfram Alpha での数値検証で成立を確認している。

＜Ｈ３＞を再掲。

$$\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sha}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{sh3a}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch5a}}{\mathrm{sh5a}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch7a}}{\mathrm{sh7a}}\right)\cdot\cdot$$

$$=\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\mathrm{ch}2a}{\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}2a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}12a+\mathrm{ch}2a}{\mathrm{ch}12a-\mathrm{ch}2a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}20a+\mathrm{ch}2a}{\mathrm{ch}20a-\mathrm{ch}2a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}28a+\mathrm{ch}2a}{\mathrm{ch}28a-\mathrm{ch}2a}\right)\cdot\cdot \quad \text{----}\langle H3\rangle$$

（a＞0）

この式は2023年11月に出していたものだが、ノートに「大事な式」とだけ記してそのままになっていた。今回ノートを見直していて改めて大事な式だと気づいた。なんとも意味深い形をしている。
この式はπ²/8極限公式とも関係している。＜Ｈ３＞を下記＜Ｓ２＞に適用すると、今回の＜Ｓ２－２＞になる！！

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}\mathrm{sha}\cdot\log\left(\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\mathrm{cha}}{\mathrm{ch}2a-\mathrm{cha}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}6a+\mathrm{cha}}{\mathrm{ch}6a-\mathrm{cha}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}10a+\mathrm{cha}}{\mathrm{ch}10a-\mathrm{cha}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}14a+\mathrm{cha}}{\mathrm{ch}14a-\mathrm{cha}}\right)\cdot\cdot\right) \quad \text{----}\langle S2\rangle$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}2a\cdot\log(1/(\mathrm{tha}\cdot\mathrm{th}3a\cdot\mathrm{th}5a\cdot\mathrm{th}7a\cdot\cdot)) \quad \text{----}\langle S2-2\rangle$$

今回の極限公式から＜Ｓ４－１＞の証明を以下に示す。
==================================

＜S4－1＞の証明

下式[1]の左辺から出発する。それに対し、１２年前のこちらの2012/8/16の[導出]と類似的な方法を使って変形していき[1]右辺に到達する。途中でゼータの香りの漂う・・（その３０７）でのフーリエ級数を使う。この[1]は、三角関数と双曲線関数の融合域の多くの母等式の中の一つ“二変数・第三基本フーリエ・Sin基本母等式”である。

$$\frac{\sin x}{e^a-1}+\frac{\sin 3x}{e^{3a}-1}+\frac{\sin 5x}{e^{5a}-1}+\frac{\sin 7x}{e^{7a}-1}+\cdot\cdot$$
$$=\sin x\left(\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch}2a-\cos 2x}\right)+\left(\frac{\mathrm{ch}2a}{\mathrm{ch}4a-\cos 2x}\right)+\left(\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{ch}6a-\cos 2x}\right)+\left(\frac{\mathrm{ch}4a}{\mathrm{ch}8a-\cos 2x}\right)+\cdot\cdot\right) \quad \text{--}[1]$$

(a＞0、x は任意実数)

この式のxにπ/2を代入して、変形して次を得る。

$$\frac{1}{e^a-1}-\frac{1}{e^{3a}-1}+\frac{1}{e^{5a}-1}-\frac{1}{e^{7a}-1}+-\cdot\cdot=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch}2a}+\frac{1}{\mathrm{ch}3a}+\frac{1}{\mathrm{ch}4a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{--}[2]$$

(a＞0)

この式の両辺にe^a-1を掛けると、次となる。

$$\frac{e^a-1}{e^a-1}-\frac{e^a-1}{e^{3a}-1}+\frac{e^a-1}{e^{5a}-1}-\frac{e^a-1}{e^{7a}-1}+-\cdot\cdot=\left(\frac{e^a-1}{2}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch}2a}+\frac{1}{\mathrm{ch}3a}+\frac{1}{\mathrm{ch}4a}+\cdot\cdot\right) \text{--}[3]$$

(a＞0)

上式でaを0に近づけていき、ロピタルの定理を適用すると左辺は1−1/3+1/5−1/7+−・・つまりπ/4になって、最後に式を整理すると＜Ｓ４－１＞が得られる。

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}((e^a-1)/2)\left(\frac{1}{\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch}2a}+\frac{1}{\mathrm{ch}3a}+\frac{1}{\mathrm{ch}4a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----}\langle S4-1\rangle$$

終わり。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このようにして＜Ｓ４－１＞は得られた。証明のポイントは[2]にわざわざ e^a-1 を掛ける点である。他式も類似の方法で得られる。

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● 極限公式の４式を並べる。

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}(e^a-1)\log\left(1/(\mathrm{tha}\cdot\mathrm{th2a}\cdot\mathrm{th3a}\cdot\mathrm{th4a}\cdot\cdot)\right) \quad \text{----<S2-1>}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh2a}\cdot\log\left(1/(\mathrm{tha}\cdot\mathrm{th3a}\cdot\mathrm{th5a}\cdot\mathrm{th7a}\cdot\cdot)\right) \quad \text{----<S2-2>}$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}((e^a-1)/2)\left(\frac{1}{\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch2a}}+\frac{1}{\mathrm{ch3a}}+\frac{1}{\mathrm{ch4a}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S4-1>}$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}\mathrm{sha}\left(\frac{1}{\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch3a}}+\frac{1}{\mathrm{ch5a}}+\frac{1}{\mathrm{ch7a}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S4-2>}$$

この $\pi^2/8$ 極限公式二式と $\pi/4$ 極限公式二式を比べると、なにやら構造？が似ている。なにかありそうである。証明はわかっても右辺が左辺になるというのはふしぎである。

これまでこんな極限公式など出なかったのだが、$\sqrt{2}$ 極限公式を得てしばらくして続々と出始めた。証明中でやっている e^a-1 をわざわざ掛けるということに長いこと気が付かなった。しかし、いったんその方法がわかれば、あっちにもこっちにも種の式がたくさんあることがわかってきた。

数学はこのような類似を行えるので、芋づる式に公式を得ることができる。このようなことは他の科学でもあるのだろうけれど、数学において類似の威力は際立っている気がする。類似と一般化では、私は類似が好きである。一般化にはそれほど興味がない。

●極限公式を見ていると、二つの無限が出現していることに気づく。無限に足し合わせる無限と、a を無限に小さくしていく無限である。公式はこんな二つの無限から成っている。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2025.1.5 杉岡幹生

＜参考文献＞

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)

[rev1.01　改訂]　L(2)極限公式の＜Ｓ１＞式の書き損じを訂正。2025.1.15