＜ 三角関数と双曲線関数の融合域（その２４）＞ rev1.01

新たに恒等式一つと極限公式を三つ得たので下方に青色式で示す。これまでの主要なものと一緒に示した。

以下では、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。a や α は任意の実数であり、よって例えば、$(a \neq 0)$は「a は 0 でない任意の実数」を意味する。
$\tan^{-1}$, th^{-1} はそれぞれ arctan, arctanh である。log は自然対数、e は自然対数の底。
＝＝

＜ 恒等式 ＞

$$\frac{1}{\mathrm{cha}-1}-\frac{1}{\mathrm{sha}}=2\left(\frac{1}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----<1>}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}-\frac{1}{\mathrm{cha}+1}=2\left(\frac{1}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----<2>}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2(a/2)}=4\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch2a}}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch4a}}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----<3>}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^2(a/2)}=4\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{ch2a}}{\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{ch4a}}{\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha}}+-\cdot\cdot\right) \quad \text{----<4>}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}=2\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+-\cdot\cdot\right) \quad \text{-----<5>}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}=2\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----<6>}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\frac{1}{e^a-1}=\left(\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}-1\right)-\left(\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}-1\right)+\left(\frac{\mathrm{sh6a}}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}-1\right)-\left(\frac{\mathrm{sh8a}}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}-1\right)+-\cdot\cdot \quad \text{--<7-1>}$$

$(a > 0)$

$$\frac{1}{e^{a}+1} = \left(1 - \frac{sh2a}{ch2a+cha}\right) - \left(1 - \frac{sh4a}{ch4a+cha}\right) + \left(1 - \frac{sh6a}{ch6a+cha}\right) - \left(1 - \frac{sh8a}{ch8a+cha}\right) + - \cdot \cdot \text{ --<7-2>}$$

$(a > 0)$

$$th\left(\frac{a}{2}\right) = \left(\frac{ch2a-cha}{ch2a+cha}\right)\left(\frac{ch4a+cha}{ch4a-cha}\right)\left(\frac{ch6a-cha}{ch6a+cha}\right)\left(\frac{ch8a+cha}{ch8a-cha}\right) \cdot \cdot \text{ ----<E1>}$$

$(a > 0)$

$$th\left(\frac{a}{2}\right) = \left(\frac{sh2a-sha}{sh2a+sha}\right)\left(\frac{sh4a-sha}{sh4a+sha}\right)\left(\frac{sh6a-sha}{sh6a+sha}\right)\left(\frac{sh8a-sha}{sh8a+sha}\right) \cdot \cdot \text{ ----<E2>}$$

$(a > 0)$

$$1 - \frac{1}{e^{2a}} = \left(\frac{e^{2a}(th2a - tha)}{th2a + tha}\right)\left(\frac{e^{2a}(th4a - tha)}{th4a + tha}\right)\left(\frac{e^{2a}(th6a - tha)}{th6a + tha}\right)\left(\frac{e^{2a}(th8a - tha)}{th8a + tha}\right) \cdot \cdot \quad \text{--<E3>}$$

$(a > 0)$

$$\frac{1}{sh^{2}(a/2)} = 4sha\left(\frac{sh2a}{(ch2a-cha)^{2}} + \frac{sh4a}{(ch4a-cha)^{2}} + \frac{sh6a}{(ch6a-cha)^{2}} + \frac{sh8a}{(ch8a-cha)^{2}} + \cdot \cdot\right) \text{ ---<G1>}$$

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{ch^{2}(a/2)} = 4sha\left(\frac{sh2a}{(ch2a+cha)^{2}} + \frac{sh4a}{(ch4a+cha)^{2}} + \frac{sh6a}{(ch6a+cha)^{2}} + \frac{sh8a}{(ch8a+cha)^{2}} + \cdot \cdot\right) \text{ ---<G2>}$$

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{cha} + \frac{1}{3ch3a} + \frac{1}{5ch5a} + \frac{1}{7ch7a} + \cdot \cdot$$

$$= \log\left(\left(\frac{sh2a+sha}{sh2a-sha}\right)\left(\frac{sh6a+sha}{sh6a-sha}\right)\left(\frac{sh10a+sha}{sh10a-sha}\right)\left(\frac{sh14a+sha}{sh14a-sha}\right) \cdot \cdot\right) \text{ ----<H1>}$$

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}+\frac{1}{3\mathrm{sh}3\mathrm{a}}+\frac{1}{5\mathrm{sh}5\mathrm{a}}+\frac{1}{7\mathrm{sh}7\mathrm{a}}+\cdot\cdot$$

$$=\log\left(\left(\frac{\mathrm{ch}2\mathrm{a}+\mathrm{cha}}{\mathrm{ch}2\mathrm{a}-\mathrm{cha}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}6\mathrm{a}+\mathrm{cha}}{\mathrm{ch}6\mathrm{a}-\mathrm{cha}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}10\mathrm{a}+\mathrm{cha}}{\mathrm{ch}10\mathrm{a}-\mathrm{cha}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}14\mathrm{a}+\mathrm{cha}}{\mathrm{ch}14\mathrm{a}-\mathrm{cha}}\right)\cdot\cdot\right) \quad \text{----<H2>}$$

（a > 0）

$$\frac{1}{e^{a}-\alpha}-\frac{3}{e^{3a}-\alpha}+\frac{5}{e^{5a}-\alpha}-\frac{7}{e^{7a}-\alpha}+-\cdot\cdot$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\mathrm{sha}}{(\mathrm{cha})^2}+\frac{\alpha\mathrm{sh}2\mathrm{a}}{(\mathrm{ch}2\mathrm{a})^2}+\frac{\alpha^2\mathrm{sh}3\mathrm{a}}{(\mathrm{ch}3\mathrm{a})^2}+\frac{\alpha^3\mathrm{sh}4\mathrm{a}}{(\mathrm{ch}4\mathrm{a})^2}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<P1-3>}$$

（$|\alpha|<e^{a}$ 且つ a > 0）

$$\frac{\alpha\mathrm{sha}}{(\mathrm{cha})^2}+\frac{\alpha^2\mathrm{sh}2\mathrm{a}}{2(\mathrm{ch}2\mathrm{a})^2}+\frac{\alpha^3\mathrm{sh}3\mathrm{a}}{3(\mathrm{ch}3\mathrm{a})^2}+\frac{\alpha^4\mathrm{sh}4\mathrm{a}}{4(\mathrm{ch}4\mathrm{a})^2}+\cdot\cdot$$

$$=2\log\left((1-\alpha e^{-a})^{-1}(1-\alpha e^{-3a})^{3}(1-\alpha e^{-5a})^{-5}(1-\alpha e^{-7a})^{7}(1-\alpha e^{-9a})^{-9}(1-\alpha e^{-11a})^{11}\cdot\cdot\right) \quad \text{-<P1-4>}$$

（$|\alpha|<e^{a}$ 且つ a > 0）

$$\left((1-\alpha e^{-2a})(1-\alpha e^{-6a})^{1/3}(1-\alpha e^{-10a})^{1/5}(1-\alpha e^{-14a})^{1/7}(1-\alpha e^{-18a})^{1/9}\cdot\cdot\right)^2$$

$$=(\mathrm{tha})^{\alpha}(\mathrm{th}2\mathrm{a})^{\alpha^2/2}(\mathrm{th}3\mathrm{a})^{\alpha^3/3}(\mathrm{th}4\mathrm{a})^{\alpha^4/4}(\mathrm{th}5\mathrm{a})^{\alpha^5/5}(\mathrm{th}6\mathrm{a})^{\alpha^6/6}\cdot\cdot \quad \text{--<P2>}$$

（$|\alpha|\leqq 1$ 且つ a > 0）

$$\frac{1}{e^{2a}-\alpha}+\frac{2}{e^{4a}-\alpha}+\frac{3}{e^{6a}-\alpha}+\frac{4}{e^{8a}-\alpha}+\cdot\cdot=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{(\mathrm{sha})^2}+\frac{\alpha}{(\mathrm{sh}2\mathrm{a})^2}+\frac{\alpha^2}{(\mathrm{sh}3\mathrm{a})^2}+\frac{\alpha^3}{(\mathrm{sh}4\mathrm{a})^2}+\cdot\cdot\right) \quad \text{--<Q>}$$

（$|\alpha|<e^{a}$ 且つ a > 0）

$$\frac{\alpha}{e^{a}-1}+\frac{\alpha^2}{2(e^{2a}-1)}+\frac{\alpha^3}{3(e^{3a}-1)}+\frac{\alpha^4}{4(e^{4a}-1)}+\cdot\cdot$$

$$=\log\left(\frac{1}{(1-\alpha e^{-a})(1-\alpha e^{-2a})(1-\alpha e^{-3a})(1-\alpha e^{-4a})\cdot\cdot}\right) \quad \text{----<Q1>}$$

（$|\alpha|<e^{a}$ 且つ a > 0）

［＜Q１＞での$\alpha=1$のケース］

$$\frac{1}{(e^{a}-1)}+\frac{1}{2(e^{2a}-1)}+\frac{1}{3(e^{3a}-1)}+\frac{1}{4(e^{4a}-1)}+\cdot\cdot$$

$$=\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-2a})(1-e^{-3a})(1-e^{-4a})\cdot\cdot}\right)$$ ----<Q1−2>

$(a>0)$

$$\frac{\alpha}{(\mathrm{sh}a)^2}+\frac{\alpha^2}{2(\mathrm{sh}2a)^2}+\frac{\alpha^3}{3(\mathrm{sh}3a)^2}+\frac{\alpha^4}{4(\mathrm{sh}4a)^2}+\cdot\cdot$$

$$=4\log\left(\frac{1}{(1-\alpha e^{-2a})(1-\alpha e^{-4a})^2(1-\alpha e^{-6a})^3(1-\alpha e^{-8a})^4\cdot\cdot}\right)$$ ----<Q1−3>

$(\,|\alpha|<e^{2a}$ 且つ $a>0\,)$

$$\frac{\alpha}{(\mathrm{ch}a)^2}+\frac{\alpha^2}{2(\mathrm{ch}2a)^2}+\frac{\alpha^3}{3(\mathrm{ch}3a)^2}+\frac{\alpha^4}{4(\mathrm{ch}4a)^2}+\cdot\cdot$$

$$=4\log\left((1-\alpha e^{-2a})^{-1}(1-\alpha e^{-4a})^{2}(1-\alpha e^{-6a})^{-3}(1-\alpha e^{-8a})^{4}(1-\alpha e^{-10a})^{-5}(1-\alpha e^{-12a})^{6}\cdot\cdot\right)$$ --<R1>

$(-e^{2a}\leqq\alpha<e^{2a}$ 且つ $a>0\,)$

＜ 公式 ＞

◆√2 極限公式

$$\sqrt{2}=\lim_{a\to+0}(1+e^{-a})(1+e^{-3a})^{-1}(1+e^{-5a})(1+e^{-7a})^{-1}(1+e^{-9a})(1+e^{-11a})^{-1}\cdot\cdot$$ ---<N1-2>

◆√2 極限公式（別バージョン）

$$\sqrt{2}=\lim_{a\to+0}(1+e^{-a})(1+e^{-2a})^{-1}(1+e^{-3a})(1+e^{-4a})^{-1}(1+e^{-5a})(1+e^{-6a})^{-1}\cdot\cdot$$ ---<P1-4>

◆$2^{1/4}$極限公式

$$2^{1/4}=\lim_{a\to+0}(1+e^{-a})(1+e^{-2a})^{-2}(1+e^{-3a})^{3}(1+e^{-4a})^{-4}(1+e^{-5a})^{5}(1+e^{-6a})^{-6}\cdot\cdot$$ ---<R2>

◆L(2)極限公式

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}\mathrm{sh}a\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}3a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}5a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}7a}\right)+\cdot\cdot\right)\cdot\cdot$$ --<S1>

◆$\frac{\pi^2}{8}$極限公式

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}\ \mathrm{sha}\cdot\log\left(\left(\frac{\mathrm{ch2a+cha}}{\mathrm{ch2a-cha}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch6a+cha}}{\mathrm{ch6a-cha}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch10a+cha}}{\mathrm{ch10a-cha}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch14a+cha}}{\mathrm{ch14a-cha}}\right)\cdot\cdot\right)\cdot\cdot \quad \text{--<S2>}$$

◆$\frac{\pi^2}{6}$極限公式

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}(1-e^{a})\cdot\log\left((1-e^{-a})(1-e^{-2a})(1-e^{-3a})(1-e^{-4a})\cdot\cdot\right)\cdot\cdot \quad \text{--<S3>}$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

これら四つの青色式が得られた。＜Ｅ３＞は一変数の恒等式となっている。すぐ上の極限公式三つは、恒等式ではないので＜公式＞の中に入れた。いずれの式も Excel や Wolfram Alpha での数値検証で成立を確認している。

今回の＜Ｅ３＞を＜Ｅ２＞と一緒に並べよう。

$$\mathrm{th}\left(\frac{a}{2}\right)=\left(\frac{\mathrm{sh2a-sha}}{\mathrm{sh2a+sha}}\right)\left(\frac{\mathrm{sh4a-sha}}{\mathrm{sh4a+sha}}\right)\left(\frac{\mathrm{sh6a-sha}}{\mathrm{sh6a+sha}}\right)\left(\frac{\mathrm{sh8a-sha}}{\mathrm{sh8a+sha}}\right)\cdot\cdot \quad \text{----<E2>}$$

$$(a>0)$$

$$1-\frac{1}{e^{2a}}=\left(\frac{e^{2a}(\mathrm{th2a}-\mathrm{tha})}{\mathrm{th2a}+\mathrm{tha}}\right)\left(\frac{e^{2a}(\mathrm{th4a}-\mathrm{tha})}{\mathrm{th4a}+\mathrm{tha}}\right)\left(\frac{e^{2a}(\mathrm{th6a}-\mathrm{tha})}{\mathrm{th6a}+\mathrm{tha}}\right)\left(\frac{e^{2a}(\mathrm{th8a}-\mathrm{tha})}{\mathrm{th8a}+\mathrm{tha}}\right)\cdot\cdot \quad \text{--<E3>}$$

$$(a>0)$$

この二式では＜Ｅ２＞の方がきれいだが、両式は似ていて面白い。久々にこの“値＝無限積”の形の恒等式が得られてうれしいものである。任意の a で成り立つのがなんともよい・・

さて、今回は極限公式が三つ得られた。

極限公式は、数か月前から出始めてきたものだが、これまで$\sqrt{2}$か$2^{1/4}$のものしか得られていなかった。私はπの式を求めたい！とずっと思っていたのだが、ひょんなことから今回得ることができた。L(2)の式も出た。L(2)はもちろんL(2)＝1−1/3²+1/5²−1/7²+−・・のカタランの定数のことである。L(2)極限公式は他の極限式とちがって$\lim_{a\to\pm0}$ と a がプラス方向、マイナス方向どちらから 0 に近づいても OK なのでその点注意いただきたい。

今回得た極限公式を再び並べる。

◆L(2)極限公式

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}\ \mathrm{sha}\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sha}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh3a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh5a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh7a}}\right)+\cdot\cdot\right)\cdot\cdot \quad \text{--<S1>}$$

◆$\dfrac{\pi^2}{8}$極限公式（(3/4)ζ(2)極限公式）

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}\ \mathrm{sha}\cdot\log\left(\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}10a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}10a-\mathrm{ch}a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}14a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}14a-\mathrm{ch}a}\right)\cdot\cdot\right)\cdot\cdot \quad \text{--<S2>}$$

◆$\dfrac{\pi^2}{6}$極限公式（ζ(2)極限公式）

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}(1-e^{a})\cdot\log\left((1-e^{-a})(1-e^{-2a})(1-e^{-3a})(1-e^{-4a})\cdot\cdot\right)\cdot\cdot \quad \text{--<S3>}$$

これらはどれも魅力ある式だが、私が特に惹かれるのは＜Ｓ３＞である。

＜Ｓ３＞は簡明そのものにして深いものを表していると思う。log の中はテータ関数である。

可積分系とコマ（その１７）（ikuro-kotaro. sakura. ne. jp）

＜Ｓ３＞の$(1-e^{-a})(1-e^{-2a})(1-e^{-3a})(1-e^{-4a})\cdot\cdot$は、上記佐藤氏サイト中のテータ関数Θ4

Θ4＝Π（１－ｑ＾2n）

と実質的に同じである！（e^{-a}をq^2とすればよい）

＜Ｓ３＞の導出方法（証明）を以下に記す。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜S3＞の証明

上方にある恒等式の中から、＜Ｑ１－２＞を使って証明する。

$$\frac{1}{(e^{a}-1)}+\frac{1}{2(e^{2a}-1)}+\frac{1}{3(e^{3a}-1)}+\frac{1}{4(e^{4a}-1)}+\cdot\cdot$$
$$=\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-2a})(1-e^{-3a})(1-e^{-4a})\cdot\cdot}\right) \quad \text{----<Q1-2>}$$
$$(a>0)$$

この式の両辺に$e^{a}-1$を掛けると、次となる。

$$\frac{(e^{a}-1)}{(e^{a}-1)}+\frac{(e^{a}-1)}{2(e^{2a}-1)}+\frac{(e^{a}-1)}{3(e^{3a}-1)}+\frac{(e^{a}-1)}{4(e^{4a}-1)}+\cdot\cdot$$
$$=(e^{a}-1)\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-2a})(1-e^{-3a})(1-e^{-4a})\cdot\cdot}\right)$$
$$(a>0)$$

上式でａを０に近づけていき、ロピタルの定理を適用すると左辺はζ(2)になって、最後に式を整理すると＜Ｓ３＞が得られる。

終わり。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このようにして＜Ｓ３＞は得られた。他の二つも類似の方法で得られる。

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●＜Ｓ３＞を再掲しよう。

◆$\dfrac{\pi^2}{6}$極限公式（ζ(2)極限公式）

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}(1-e^{a})\cdot\log\Big((1-e^{-a})(1-e^{-2a})(1-e^{-3a})(1-e^{-4a})\cdot\cdot\Big)\cdot\cdot\quad\text{--<S3>}$$

右辺でａを０に近づけると左辺になるのは、証明を知ってもなにかふしぎである。味わいがあり、簡にして深い式といえる。

●＜Ｓ３＞の証明は、上記で示したように簡単明瞭である。

ロピタルの定理さえ知っていれば高校生でも理解できる。昔は複雑なものが高級なものと思っていたが、それは間違いと最近は思うようになった。誰もがわかり且つ深いものがよいものである。

●「近世数学史談」（高木貞治著、共立出版）の中で、高木氏は「数学は簡明を旨とする」と記していたのを最近見つけ、我が意を得たり！と思った。簡単明瞭というのは数学のみならず、どんな場面でも大事である。

●＜Ｓ３＞証明中の＜Ｑ１－２＞式はかなり前から得ていたのに、この簡単な証明に長く気づかなかった。最近「πの極限公式が出ないものか！？」という意識でもって式を眺めるようになっていたので、まずひょんなことからＬ(2)極限公式が出てコツをつかみ、それからつぎつぎと＜Ｓ２＞、＜Ｓ３＞が出た。

簡単な証明でも意識の眼（関心の眼）でもって対象を見ないとなかなか気づかない・・

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2025.1.1 杉岡幹生

＜参考文献またはサイト＞

・「数学公式Ⅰ」,「数学公式Ⅱ」,「数学公式Ⅲ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」（Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社）

・可積分系とコマ（その１７）（ikuro-kotaro.sakura.ne.jp）

[rev1.01　改訂]　Ｌ(2)極限公式の＜Ｓ１＞式の書き損じを訂正。2025.1.15