＜ 三角関数と双曲線関数の融合域（その２３）＞

新たに恒等式を二つ得たので下方に青色式で示す。これまでの主要なものと一緒に示した。なお、前回までの＜Ｐ１＞、＜Ｐ１－２＞、＜Ｍ２＞、＜Ｎ２＞は＜Ｑ１＞から自然に導出することができるので削除した。

以下では、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。a や α は任意の実数であり、よって例えば、$(a \neq 0)$は「a は 0 でない任意の実数」を意味する。

$\tan^{-1}$, th^{-1} はそれぞれ arctan, arctanh である。log は自然対数、e は自然対数の底。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜ 恒等式 ＞

$$\frac{1}{\mathrm{cha}-1}-\frac{1}{\mathrm{sha}}=2\left(\frac{1}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----＜1＞}$$

$(a > 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}-\frac{1}{\mathrm{cha}+1}=2\left(\frac{1}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----＜2＞}$$

$(a > 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2(a/2)}=4\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch2a}}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch4a}}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----＜3＞}$$

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^2(a/2)}=4\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{ch2a}}{\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{ch4a}}{\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha}}+-\cdot\cdot\right) \quad \text{----＜4＞}$$

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}=2\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+-\cdot\cdot\right) \quad \text{-----＜5＞}$$

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}=2\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----＜6＞}$$

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{e^a-1}=\left(\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}-1\right)-\left(\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}-1\right)+\left(\frac{\mathrm{sh6a}}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}-1\right)-\left(\frac{\mathrm{sh8a}}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}-1\right)+-\cdot\cdot \quad \text{--＜7-1＞}$$

$$(a > 0)$$

$$\frac{1}{e^a+1} = \left(1 - \frac{sh2a}{ch2a+cha}\right) - \left(1 - \frac{sh4a}{ch4a+cha}\right) + \left(1 - \frac{sh6a}{ch6a+cha}\right) - \left(1 - \frac{sh8a}{ch8a+cha}\right) + - \cdot \cdot \text{---<7-2>}$$

$$(a > 0)$$

$$th\left(\frac{a}{2}\right) = \left(\frac{ch2a-cha}{ch2a+cha}\right)\left(\frac{ch4a+cha}{ch4a-cha}\right)\left(\frac{ch6a-cha}{ch6a+cha}\right)\left(\frac{ch8a+cha}{ch8a-cha}\right) \cdot \cdot \text{ ----<E1>}$$

$$(a > 0)$$

$$th\left(\frac{a}{2}\right) = \left(\frac{sh2a-sha}{sh2a+sha}\right)\left(\frac{sh4a-sha}{sh4a+sha}\right)\left(\frac{sh6a-sha}{sh6a+sha}\right)\left(\frac{sh8a-sha}{sh8a+sha}\right) \cdot \cdot \text{ ----<E2>}$$

$$(a > 0)$$

$$\frac{1}{sh^2(a/2)} = 4sha\left(\frac{sh2a}{(ch2a-cha)^2} + \frac{sh4a}{(ch4a-cha)^2} + \frac{sh6a}{(ch6a-cha)^2} + \frac{sh8a}{(ch8a-cha)^2} + \cdot \cdot\right) \text{ ---<G1>}$$

$$(a \neq 0)$$

$$\frac{1}{ch^2(a/2)} = 4sha\left(\frac{sh2a}{(ch2a+cha)^2} + \frac{sh4a}{(ch4a+cha)^2} + \frac{sh6a}{(ch6a+cha)^2} + \frac{sh8a}{(ch8a+cha)^2} + \cdot \cdot\right) \text{ ---<G2>}$$

$$(a \neq 0)$$

$$\frac{1}{cha} + \frac{1}{3ch3a} + \frac{1}{5ch5a} + \frac{1}{7ch7a} + \cdot \cdot$$
$$= \log\left(\left(\frac{sh2a+sha}{sh2a-sha}\right)\left(\frac{sh6a+sha}{sh6a-sha}\right)\left(\frac{sh10a+sha}{sh10a-sha}\right)\left(\frac{sh14a+sha}{sh14a-sha}\right) \cdot \cdot\right) \text{ ----<H1>}$$

$$(a \neq 0)$$

$$\frac{1}{sha} + \frac{1}{3sh3a} + \frac{1}{5sh5a} + \frac{1}{7sh7a} + \cdot \cdot$$
$$= \log\left(\left(\frac{ch2a+cha}{ch2a-cha}\right)\left(\frac{ch6a+cha}{ch6a-cha}\right)\left(\frac{ch10a+cha}{ch10a-cha}\right)\left(\frac{ch14a+cha}{ch14a-cha}\right) \cdot \cdot\right) \text{ ----<H2>}$$

$$(a > 0)$$

$$\frac{1}{e^{a}-\alpha}-\frac{3}{e^{3a}-\alpha}+\frac{5}{e^{5a}-\alpha}-\frac{7}{e^{7a}-\alpha}+-\cdot\cdot$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\mathrm{sha}}{(\mathrm{cha})^2}+\frac{\alpha\,\mathrm{sh2a}}{(\mathrm{ch2a})^2}+\frac{\alpha^2\mathrm{sh3a}}{(\mathrm{ch3a})^2}+\frac{\alpha^3\mathrm{sh4a}}{(\mathrm{ch4a})^2}+\cdot\cdot\right)$$ ----<P1−3>

($|\alpha|<e^{a}$ 且つ $a>0$)

$$\frac{\alpha\,\mathrm{sha}}{(\mathrm{cha})^2}+\frac{\alpha^2\mathrm{sh2a}}{2(\mathrm{ch2a})^2}+\frac{\alpha^3\mathrm{sh3a}}{3(\mathrm{ch3a})^2}+\frac{\alpha^4\mathrm{sh4a}}{4(\mathrm{ch4a})^2}+\cdot\cdot$$

$$=2\log\left((1-\alpha e^{-a})^{-1}(1-\alpha e^{-3a})^{3}(1-\alpha e^{-5a})^{-5}(1-\alpha e^{-7a})^{7}(1-\alpha e^{-9a})^{-9}(1-\alpha e^{-11a})^{11}\cdot\cdot\right)$$ -<P1−4>

($|\alpha|<e^{a}$ 且つ $a>0$)

$$\left((1-\alpha e^{-2a})(1-\alpha e^{-6a})^{1/3}(1-\alpha e^{-10a})^{1/5}(1-\alpha e^{-14a})^{1/7}(1-\alpha e^{-18a})^{1/9}\cdot\cdot\right)^2$$

$$=(\mathrm{tha})^{\alpha}(\mathrm{th2a})^{\alpha^2/2}(\mathrm{th3a})^{\alpha^3/3}(\mathrm{th4a})^{\alpha^4/4}(\mathrm{th5a})^{\alpha^5/5}(\mathrm{th6a})^{\alpha^6/6}\cdot\cdot$$ --<P2>

($|\alpha|\leqq 1$ 且つ $a>0$)

$$\frac{1}{e^{2a}-\alpha}+\frac{2}{e^{4a}-\alpha}+\frac{3}{e^{6a}-\alpha}+\frac{4}{e^{8a}-\alpha}+\cdot\cdot=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{(\mathrm{sha})^2}+\frac{\alpha}{(\mathrm{sh2a})^2}+\frac{\alpha^2}{(\mathrm{sh3a})^2}+\frac{\alpha^3}{(\mathrm{sh4a})^2}+\cdot\cdot\right)$$ --<Q>

($|\alpha|<e^{a}$ 且つ $a>0$)

$$\frac{\alpha}{e^{a}-1}+\frac{\alpha^2}{2(e^{2a}-1)}+\frac{\alpha^3}{3(e^{3a}-1)}+\frac{\alpha^4}{4(e^{4a}-1)}+\cdot\cdot$$

$$=\log\left(\frac{1}{(1-\alpha e^{-a})(1-\alpha e^{-2a})(1-\alpha e^{-3a})(1-\alpha e^{-4a})\cdot\cdot}\right)$$ ----<Q1>

($|\alpha|<e^{a}$ 且つ $a>0$)

［ ＜Ｑ１＞での$\alpha=1$のケース ］

$$\frac{1}{(e^{a}-1)}+\frac{1}{2(e^{2a}-1)}+\frac{1}{3(e^{3a}-1)}+\frac{1}{4(e^{4a}-1)}+\cdot\cdot$$

$$=\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-2a})(1-e^{-3a})(1-e^{-4a})\cdot\cdot}\right)$$ ----<Q1−2>

$(a>0)$

$$\frac{\alpha}{(\mathrm{sha})^2}+\frac{\alpha^2}{2(\mathrm{sh2a})^2}+\frac{\alpha^3}{3(\mathrm{sh3a})^2}+\frac{\alpha^4}{4(\mathrm{sh4a})^2}+\cdot\cdot$$

$$=4\log\left(\frac{1}{(1-\alpha e^{-2a})(1-\alpha e^{-4a})^2(1-\alpha e^{-6a})^3(1-\alpha e^{-8a})^4\cdot\cdot}\right)$$ ----<Q1−3>

$(|\alpha|<e^{2a}$ 且つ $a>0)$

$$\frac{\alpha}{(\mathrm{ch}a)^2}+\frac{\alpha^2}{2(\mathrm{ch}2a)^2}+\frac{\alpha^3}{3(\mathrm{ch}3a)^2}+\frac{\alpha^4}{4(\mathrm{ch}4a)^2}+\cdot\cdot$$

$$=4\log\left((1-\alpha e^{-2a})^{-1}(1-\alpha e^{-4a})^2(1-\alpha e^{-6a})^{-3}(1-\alpha e^{-8a})^4(1-\alpha e^{-10a})^{-5}(1-\alpha e^{-12a})^6\cdot\cdot\right)$$ --<R1>

$(-e^{2a}\leqq\alpha<e^{2a}$ 且つ $a>0)$

====================================

上方の二つの青色式＜Ｈ１＞と＜Ｈ２＞が得られた。いずれも一変数の恒等式となっている。Excel での数値検証でも成立を確認している。それら二式を再掲。

$$\frac{1}{\mathrm{ch}a}+\frac{1}{3\mathrm{ch}3a}+\frac{1}{5\mathrm{ch}5a}+\frac{1}{7\mathrm{ch}7a}+\cdot\cdot$$

$$=\log\left(\left(\frac{\mathrm{sh}2a+\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}2a-\mathrm{sh}a}\right)\left(\frac{\mathrm{sh}6a+\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}6a-\mathrm{sh}a}\right)\left(\frac{\mathrm{sh}10a+\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}10a-\mathrm{sh}a}\right)\left(\frac{\mathrm{sh}14a+\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}14a-\mathrm{sh}a}\right)\cdot\cdot\right)$$ ----<H1>

$(a\neq 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}a}+\frac{1}{3\mathrm{sh}3a}+\frac{1}{5\mathrm{sh}5a}+\frac{1}{7\mathrm{sh}7a}+\cdot\cdot$$

$$=\log\left(\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}10a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}10a-\mathrm{ch}a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}14a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}14a-\mathrm{ch}a}\right)\cdot\cdot\right)$$ ----<H2>

$(a>0)$

これらは対称的できれいである。任意の実数 a で成り立つというのが、なんともよい。

これらも三角関数と双曲線関数の融合域の二変数域から出た。二変数域は１年かけて調べて主要な公式（恒等式）は出し尽くしたつもりであったが、ある簡単な変形を発見して、このような式が出た。二変数域は広い領域であり、まだまだ見落としている変形などあると思う。

さて、＜Ｈ１＞の導出方法（証明）を以下に記す。紙幅を節約するため概要のみ示した。

====================================

<H1>の証明の概要

下式[1]の左辺から出発する。それに対し、１２年前のこちらの 2012/8/16 の[導出]と類似的な方法を使って変形していき[1]右辺に到達する。途中でゼータの香りの漂う・・（その３０７）でのフーリエ級数、深フーリエ級数を使う。

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{\mathrm{sh}a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{\mathrm{sh}3a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{\mathrm{sh}5a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{\mathrm{sh}7a}\right)+\cdot\cdot$$

$$= \frac{\sin x}{\mathrm{sh}a} + \frac{\sin 3x}{3\mathrm{sh}3a} + \frac{\sin 5x}{5\mathrm{sh}5a} + \frac{\sin 7x}{7\mathrm{sh}7a} + \cdot\cdot \quad \text{--[1]}$$

$(a \neq 0,\ x$ は任意実数$)$

上式の x に ai/2（i：虚数単位）を代入して、公式集にある $\tan^{-1}(ix) = i \cdot \mathrm{th}^{-1}(x)$ や $\sin(ix) = i \cdot \mathrm{sh}(x)$ やさらに $\mathrm{th}^{-1}(b/a) = (1/2)\log((a+b)/(a-b))$ などの公式を使って、式の変形を続ければ＜Ｈ１＞に到達する。

終わり。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

超大雑把で申し訳ないが、上記が＜Ｈ１＞の証明の道筋となる。＜Ｈ２＞も類似の方法で得られる。証明途中の[1]も素晴らしい式であり、豊かな内容を含んでいる。

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●今回の二式を再掲しよう。

$$\frac{1}{\mathrm{ch}a} + \frac{1}{3\mathrm{ch}3a} + \frac{1}{5\mathrm{ch}5a} + \frac{1}{7\mathrm{ch}7a} + \cdot\cdot$$

$$= \log\left(\left(\frac{\mathrm{sh}2a+\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}2a-\mathrm{sh}a}\right) \left(\frac{\mathrm{sh}6a+\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}6a-\mathrm{sh}a}\right) \left(\frac{\mathrm{sh}10a+\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}10a-\mathrm{sh}a}\right) \left(\frac{\mathrm{sh}14a+\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}14a-\mathrm{sh}a}\right) \cdot\cdot \right) \quad \text{----<H1>}$$

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}a} + \frac{1}{3\mathrm{sh}3a} + \frac{1}{5\mathrm{sh}5a} + \frac{1}{7\mathrm{sh}7a} + \cdot\cdot$$

$$= \log\left(\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}a}\right) \left(\frac{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}a}\right) \left(\frac{\mathrm{ch}10a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}10a-\mathrm{ch}a}\right) \left(\frac{\mathrm{ch}14a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}14a-\mathrm{ch}a}\right) \cdot\cdot \right) \quad \text{----<H2>}$$

$(a > 0)$

これらは本当に美しい。いつまでもながめていられる。

左辺はゼータの香りが漂っている。右辺 log 内はテータ関数の進化系のような形をしている。三角関数と双曲線関数の融合域を調べていると右辺 log 内のような形がよく出てくる。これらはヤコビのテータ関数よりもう一段深いところにいるものなのだが、この形、関数？は本質的に重要なものと思っている。

＜Ｈ１＞の log() 内は sh 系テータ類似物、＜Ｈ２＞の log() 内は ch 系テータ類似物などとノートに記している。

●　では次の交代級数のものはどんなことになるのか。現時点ではなにもわからない。

$$\frac{1}{\mathrm{ch}a} - \frac{1}{3\mathrm{ch}3a} + \frac{1}{5\mathrm{ch}5a} - \frac{1}{7\mathrm{ch}7a} + - \cdot\cdot \quad \text{とか} \quad \frac{1}{\mathrm{sh}a} - \frac{1}{3\mathrm{sh}3a} + \frac{1}{5\mathrm{sh}5a} - \frac{1}{7\mathrm{sh}7a} + - \cdot\cdot$$

●＜Ｈ１＞と＜Ｅ２＞、＜Ｈ２＞と＜Ｅ１＞を並べたい。

$$\frac{1}{\mathrm{cha}}+\frac{1}{3\mathrm{ch}3\mathrm{a}}+\frac{1}{5\mathrm{ch}5\mathrm{a}}+\frac{1}{7\mathrm{ch}7\mathrm{a}}+\cdot\ \cdot$$

$$=\log\left(\left(\frac{\mathrm{sh2a+sha}}{\mathrm{sh2a-sha}}\right)\left(\frac{\mathrm{sh6a+sha}}{\mathrm{sh6a-sha}}\right)\left(\frac{\mathrm{sh10a+sha}}{\mathrm{sh10a-sha}}\right)\left(\frac{\mathrm{sh14a+sha}}{\mathrm{sh14a-sha}}\right)\cdot\ \cdot\right)\quad\text{----}\langle\mathrm{H1}\rangle$$

$$(\mathrm{a}\neq 0)$$

$$\mathrm{th}\left(\frac{\mathrm{a}}{2}\right)=\left(\frac{\mathrm{sh2a-sha}}{\mathrm{sh2a+sha}}\right)\left(\frac{\mathrm{sh4a-sha}}{\mathrm{sh4a+sha}}\right)\left(\frac{\mathrm{sh6a-sha}}{\mathrm{sh6a+sha}}\right)\left(\frac{\mathrm{sh8a-sha}}{\mathrm{sh8a+sha}}\right)\cdot\ \cdot\quad\text{----}\langle\mathrm{E2}\rangle$$

$$(\mathrm{a}>0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}+\frac{1}{3\mathrm{sh}3\mathrm{a}}+\frac{1}{5\mathrm{sh}5\mathrm{a}}+\frac{1}{7\mathrm{sh}7\mathrm{a}}+\cdot\ \cdot$$

$$=\log\left(\left(\frac{\mathrm{ch2a+cha}}{\mathrm{ch2a-cha}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch6a+cha}}{\mathrm{ch6a-cha}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch10a+cha}}{\mathrm{ch10a-cha}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch14a+cha}}{\mathrm{ch14a-cha}}\right)\cdot\ \cdot\right)\quad\text{----}\langle\mathrm{H2}\rangle$$

$$(\mathrm{a}>0)$$

$$\mathrm{th}\left(\frac{\mathrm{a}}{2}\right)=\left(\frac{\mathrm{ch2a-cha}}{\mathrm{ch2a+cha}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch4a+cha}}{\mathrm{ch4a-cha}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch6a-cha}}{\mathrm{ch6a+cha}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch8a+cha}}{\mathrm{ch8a-cha}}\right)\cdot\ \cdot\quad\text{----}\langle\mathrm{E1}\rangle$$

$$(\mathrm{a}>0)$$

＜Ｈ１＞と＜Ｅ２＞、また＜Ｈ２＞と＜Ｅ１＞の２ペアを見ると、面白いことに気づく。

＜Ｅ２＞右辺の半分（一つ飛ばし）が、＜Ｈ１＞の log 内の逆数のものになっている。
＜Ｅ１＞右辺の半分（一つ飛ばし）が、＜Ｈ２＞の log 内の逆数のものになっている。

このように＜Ｈ１＞と＜Ｅ２＞、そして＜Ｈ２＞と＜Ｅ１＞は密接に関係していると分かった。
では、その右辺のあと半分はどうなっているのか？ 全くわからないが、なにかが隠れていると思う。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2024.12.28 杉岡幹生

＜参考サイト＞

・「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」（Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社）