＜ 三角関数と双曲線関数の融合域（その２２）＞

新たに恒等式を三つ得たので下方に青色式で示す。これまでの主要なものと一緒に示した。また少し前に得たＶ(q)のべき展開係数の生成規則がわかったので下方で示した。なお、前回までの１変数の＜Ｐ１－３＞は、今回新たに提示した別種の二変数式に置き換えた。

$$V(q)=(1-q)(1-q^2)^2(1-q^3)^3(1-q^4)^4\cdots$$
$$=1-q-2q^2-q^3+0q^4+4q^5+4q^6+7q^7+3q^8-2q^9-9q^{10}-17q^{11}-25q^{12}-24q^{13}-13q^{14}-q^{15}+32q^{16}+\cdots$$

以下では、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。a やαは任意の実数であり、よって例えば、$(a\neq 0)$は「a は 0 でない任意の実数」を意味する。
$\tan^{-1}$, th^{-1} はそれぞれ arctan, arctanh である。log は自然対数、e は自然対数の底。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜ 恒等式 ＞

$$\frac{1}{\mathrm{ch}a-1}-\frac{1}{\mathrm{sh}a}=2\left(\frac{1}{\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}a}+\frac{1}{\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}a}+\frac{1}{\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}a}+\frac{1}{\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}a}+\cdots\right)\quad\text{------}\langle 1\rangle$$
$$(a>0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}a}-\frac{1}{\mathrm{ch}a+1}=2\left(\frac{1}{\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a}+\frac{1}{\mathrm{ch}4a+\mathrm{ch}a}+\frac{1}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a}+\frac{1}{\mathrm{ch}8a+\mathrm{ch}a}+\cdots\right)\quad\text{------}\langle 2\rangle$$
$$(a>0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2(a/2)}=4\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}2a}{\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}4a}{\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}a}+\cdots\right)\quad\text{------}\langle 3\rangle$$
$$(a\neq 0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^2(a/2)}=4\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a}-\frac{\mathrm{ch}2a}{\mathrm{ch}4a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a}-\frac{\mathrm{ch}4a}{\mathrm{ch}8a+\mathrm{ch}a}+-\cdots\right)\quad\text{-----}\langle 4\rangle$$
$$(a\neq 0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}a}=2\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}a}-\frac{\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}a}-\frac{\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}a}+-\cdots\right)\quad\text{------}\langle 5\rangle$$
$$(a\neq 0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}a}=2\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}4a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}8a+\mathrm{ch}a}+\cdots\right)\quad\text{------}\langle 6\rangle$$

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{e^a-1} = \left(\frac{sh2a}{ch2a-cha} - 1\right) - \left(\frac{sh4a}{ch4a-cha} - 1\right) + \left(\frac{sh6a}{ch6a-cha} - 1\right) - \left(\frac{sh8a}{ch8a-cha} - 1\right) + - \cdot \cdot \quad \text{--<7-1>}$$

$(a > 0)$

$$\frac{1}{e^a+1} = \left(1 - \frac{sh2a}{ch2a+cha}\right) - \left(1 - \frac{sh4a}{ch4a+cha}\right) + \left(1 - \frac{sh6a}{ch6a+cha}\right) - \left(1 - \frac{sh8a}{ch8a+cha}\right) + - \cdot \cdot \quad \text{--<7-2>}$$

$(a > 0)$

$$th\left(\frac{a}{2}\right) = \left(\frac{ch2a-cha}{ch2a+cha}\right) \times \left(\frac{ch4a+cha}{ch4a-cha}\right) \times \left(\frac{ch6a-cha}{ch6a+cha}\right) \times \left(\frac{ch8a+cha}{ch8a-cha}\right) \times \cdot \cdot \quad \text{----<E1>}$$

$(a > 0)$

$$th\left(\frac{a}{2}\right) = \left(\frac{sh2a-sha}{sh2a+sha}\right) \times \left(\frac{sh4a-sha}{sh4a+sha}\right) \times \left(\frac{sh6a-sha}{sh6a+sha}\right) \times \left(\frac{sh8a-sha}{sh8a+sha}\right) \times \cdot \cdot \quad \text{----<E2>}$$

$(a > 0)$

$$\frac{1}{sh^2(a/2)} = 4sha\left(\frac{sh2a}{(ch2a-cha)^2} + \frac{sh4a}{(ch4a-cha)^2} + \frac{sh6a}{(ch6a-cha)^2} + \frac{sh8a}{(ch8a-cha)^2} + \cdot \cdot \right) \quad \text{---<G1>}$$

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{ch^2(a/2)} = 4sha\left(\frac{sh2a}{(ch2a+cha)^2} + \frac{sh4a}{(ch4a+cha)^2} + \frac{sh6a}{(ch6a+cha)^2} + \frac{sh8a}{(ch8a+cha)^2} + \cdot \cdot \right) \quad \text{---<G2>}$$

$(a \neq 0)$

$$\frac{\alpha}{e^a-1} + \frac{\alpha^3}{3(e^{3a}-1)} + \frac{\alpha^5}{5(e^{5a}-1)} + \frac{\alpha^7}{7(e^{7a}-1)} + \cdot \cdot$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) \log\left(\frac{(1+\alpha e^{-a})(1+\alpha e^{-2a})(1+\alpha e^{-3a})(1+\alpha e^{-4a}) \cdot \cdot}{(1-\alpha e^{-a})(1-\alpha e^{-2a})(1-\alpha e^{-3a})(1-\alpha e^{-4a}) \cdot \cdot}\right) \quad \text{----<M2>}$$

($|\alpha| < e^a$ 且つ $a > 0$)

$$\frac{\alpha}{e^{a}+1}+\frac{\alpha^3}{3(e^{3a}+1)}+\frac{\alpha^5}{5(e^{5a}+1)}+\frac{\alpha^7}{7(e^{7a}+1)}+\cdot\cdot$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)\log\left(\frac{(1+\alpha e^{-a})(1-\alpha e^{-2a})(1+\alpha e^{-3a})(1-\alpha e^{-4a})\cdot\cdot}{(1-\alpha e^{-a})(1+\alpha e^{-2a})(1-\alpha e^{-3a})(1+\alpha e^{-4a})\cdot\cdot}\right) \quad \text{----<N2>}$$

$(\,|\alpha|<e^{a}$ 且つ $a>0\,)$

$$\frac{\alpha}{e^{a}+1}+\frac{\alpha^2}{2(e^{2a}+1)}+\frac{\alpha^3}{3(e^{3a}+1)}+\frac{\alpha^4}{4(e^{4a}+1)}+\cdot\cdot$$

$$=\log\left(\frac{(1-\alpha e^{-2a})(1-\alpha e^{-4a})(1-\alpha e^{-6a})(1-\alpha e^{-8a})\cdot\cdot}{(1-\alpha e^{-a})(1-\alpha e^{-3a})(1-\alpha e^{-5a})(1-\alpha e^{-7a})\cdot\cdot}\right) \quad \text{----<P1>}$$

$(\,|\alpha|<e^{a}$ 且つ $a>0\,)$

注記：<Ｐ１>は<Ｑ１>から導出できる、つまり<Ｑ１>と本質的に同値。

$$\frac{1}{e^{a}+1}-\frac{1}{2(e^{2a}+1)}+\frac{1}{3(e^{3a}+1)}-\frac{1}{4(e^{4a}+1)}+-\cdot\cdot$$

$$=\log\left(\frac{(1+e^{-a})(1+e^{-3a})(1+e^{-5a})(1+e^{-7a})\cdot\cdot}{(1+e^{-2a})(1+e^{-4a})(1+e^{-6a})(1+e^{-8a})\cdot\cdot}\right) \quad \text{----<P1-2>}$$

$(\,a>0\,)$

$$\frac{1}{e^{a}-\alpha}-\frac{3}{e^{3a}-\alpha}+\frac{5}{e^{5a}-\alpha}-\frac{7}{e^{7a}-\alpha}+-\cdot\cdot$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\mathrm{sh}a}{(\mathrm{ch}a)^2}+\frac{\alpha\,\mathrm{sh}2a}{(\mathrm{ch}2a)^2}+\frac{\alpha^2\mathrm{sh}3a}{(\mathrm{ch}3a)^2}+\frac{\alpha^3\mathrm{sh}4a}{(\mathrm{ch}4a)^2}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<P1-3>}$$

$(\,|\alpha|<e^{a}$ 且つ $a>0\,)$

$$\frac{\alpha\,\mathrm{sh}a}{(\mathrm{ch}a)^2}+\frac{\alpha^2\mathrm{sh}2a}{2(\mathrm{ch}2a)^2}+\frac{\alpha^3\mathrm{sh}3a}{3(\mathrm{ch}3a)^2}+\frac{\alpha^4\mathrm{sh}4a}{4(\mathrm{ch}4a)^2}+\cdot\cdot$$

$$=2\log\left((1-\alpha e^{-a})^{-1}(1-\alpha e^{-3a})^{3}(1-\alpha e^{-5a})^{-5}(1-\alpha e^{-7a})^{7}(1-\alpha e^{-9a})^{-9}(1-\alpha e^{-11a})^{11}\cdot\cdot\right) \text{-<P1-4>}$$

$(\,|\alpha|<e^{a}$ 且つ $a>0\,)$

$$\left((1-\alpha e^{-2a})(1-\alpha e^{-6a})^{1/3}(1-\alpha e^{-10a})^{1/5}(1-\alpha e^{-14a})^{1/7}(1-\alpha e^{-18a})^{1/9}\cdot\cdot\right)^2$$

$$=(\mathrm{th}a)^{\alpha}(\mathrm{th}2a)^{\alpha^2/2}(\mathrm{th}3a)^{\alpha^3/3}(\mathrm{th}4a)^{\alpha^4/4}(\mathrm{th}5a)^{\alpha^5/5}(\mathrm{th}6a)^{\alpha^6/6}\cdot\cdot \quad \text{--<P2>}$$

$(\,|\alpha|\leqq 1$ 且つ $a>0\,)$

$$\frac{1}{e^{2a}-\alpha}+\frac{2}{e^{4a}-\alpha}+\frac{3}{e^{6a}-\alpha}+\frac{4}{e^{8a}-\alpha}+\cdot\ \cdot=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{(\mathrm{sh}a)^2}+\frac{\alpha}{(\mathrm{sh}2a)^2}+\frac{\alpha^2}{(\mathrm{sh}3a)^2}+\frac{\alpha^3}{(\mathrm{sh}4a)^2}+\cdot\ \cdot\right)\quad \text{--<Q>}$$

$$(\,|\alpha|<e^a\ \text{且つ}\ a>0\,)$$

$$\frac{\alpha}{e^a-1}+\frac{\alpha^2}{2(e^{2a}-1)}+\frac{\alpha^3}{3(e^{3a}-1)}+\frac{\alpha^4}{4(e^{4a}-1)}+\cdot\ \cdot$$

$$=\log\left(\frac{1}{(1-\alpha e^{-a})(1-\alpha e^{-2a})(1-\alpha e^{-3a})(1-\alpha e^{-4a})\cdot\ \cdot}\right)\quad \text{----<Q1>}$$

$$(\,|\alpha|<e^a\ \text{且つ}\ a>0\,)$$

$$\frac{1}{(e^a-1)}+\frac{1}{2(e^{2a}-1)}+\frac{1}{3(e^{3a}-1)}+\frac{1}{4(e^{4a}-1)}+\cdot\ \cdot$$

$$=\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-2a})(1-e^{-3a})(1-e^{-4a})\cdot\ \cdot}\right)\quad \text{----<Q1-2>}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{\alpha}{(\mathrm{sh}a)^2}+\frac{\alpha^2}{2(\mathrm{sh}2a)^2}+\frac{\alpha^3}{3(\mathrm{sh}3a)^2}+\frac{\alpha^4}{4(\mathrm{sh}4a)^2}+\cdot\ \cdot$$

$$=4\log\left(\frac{1}{(1-\alpha e^{-2a})(1-\alpha e^{-4a})^2(1-\alpha e^{-6a})^3(1-\alpha e^{-8a})^4\cdot\ \cdot}\right)\quad \text{----<Q1-3>}$$

$$(\,|\alpha|<e^{2a}\ \text{且つ}\ a>0\,)$$

$$\frac{\alpha}{(\mathrm{ch}a)^2}+\frac{\alpha^2}{2(\mathrm{ch}2a)^2}+\frac{\alpha^3}{3(\mathrm{ch}3a)^2}+\frac{\alpha^4}{4(\mathrm{ch}4a)^2}+\cdot\ \cdot$$

$$=4\log((1-\alpha e^{-2a})^{-1}(1-\alpha e^{-4a})^2(1-\alpha e^{-6a})^{-3}(1-\alpha e^{-8a})^4(1-\alpha e^{-10a})^{-5}(1-\alpha e^{-12a})^6\cdot\ \cdot)\quad \text{--<R1>}$$

$$(-e^{2a}\leqq\ \alpha<e^{2a}\ \text{且つ}\ a>0\,)$$

==================================

上方の三つの青色式が得られた。いずれも二変数の恒等式となっている。Excel での数値検証でも成立を確認している。まず＜Ｐ１－３＞と＜Ｐ１—４＞を再度示すと次となる。

$$\frac{1}{e^a-\alpha}-\frac{3}{e^{3a}-\alpha}+\frac{5}{e^{5a}-\alpha}-\frac{7}{e^{7a}-\alpha}+-\cdot\ \cdot$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\mathrm{sh}a}{(\mathrm{ch}a)^2}+\frac{\alpha\,\mathrm{sh}2a}{(\mathrm{ch}2a)^2}+\frac{\alpha^2\mathrm{sh}3a}{(\mathrm{ch}3a)^2}+\frac{\alpha^3\mathrm{sh}4a}{(\mathrm{ch}4a)^2}+\cdot\ \cdot\right)\quad \text{----<P1-3>}$$

$$(\,|\alpha|<e^a\ \text{且つ}\ a>0\,)$$

$$\frac{\alpha \mathrm{sha}}{(\mathrm{cha})^2}+\frac{\alpha^2 \mathrm{sh2a}}{2(\mathrm{ch2a})^2}+\frac{\alpha^3 \mathrm{sh3a}}{3(\mathrm{ch3a})^2}+\frac{\alpha^4 \mathrm{sh4a}}{4(\mathrm{ch4a})^2}+\cdot\cdot$$

$$=2\log\left((1-\alpha e^{-a})^{-1}(1-\alpha e^{-3a})^{3}(1-\alpha e^{-5a})^{-5}(1-\alpha e^{-7a})^{7}(1-\alpha e^{-9a})^{-9}(1-\alpha e^{-11a})^{11}\cdot\cdot\right) \quad \text{-<P1-4>}$$

$(\,|\alpha|<e^a$ 且つ $a>0\,)$

＜Ｐ１－３＞の左辺はラマヌジャン式を一般化したような形になっている。右辺はゼータの香りが漂っている。

＜Ｐ１－４＞左辺はゼータの香りが漂っている。右辺は log の中がテータ関数類似物のようになっていて、逆数が交互に並ぶ無限積であり極めて面白い。

次に＜Ｐ２＞を見たい。

$$\left((1-\alpha e^{-2a})(1-\alpha e^{-6a})^{1/3}(1-\alpha e^{-10a})^{1/5}(1-\alpha e^{-14a})^{1/7}(1-\alpha e^{-18a})^{1/9}\cdot\cdot\right)^2$$

$$=(\mathrm{tha})^{\alpha}(\mathrm{th2a})^{\alpha^2/2}(\mathrm{th3a})^{\alpha^3/3}(\mathrm{th4a})^{\alpha^4/4}(\mathrm{th5a})^{\alpha^5/5}(\mathrm{th6a})^{\alpha^6/6}\cdot\cdot \quad \text{---<P2>}$$

$(\,|\alpha|\leqq 1$ 且つ $a>0\,)$

＜Ｐ２＞は無限積＝無限積となっていて意味深い形である！ 左辺はテータ関数類似物のようなもの（の２乗）となっており、それはテータ関数と兄弟の関係にあるはずである。右辺は見たことがない形をしているが、眺めるほどになにかを感じる。

さて、今回の三式の導出方法（証明）を以下に記す。紙幅を節約するため概要のみ示した。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

<P1−3>、<P1−4>、<P2>の証明の概要

下式[1]の左辺から出発する。それに対し、１２年前のこちらの 2012/8/16 の[導出]と類似的な方法を使って変形していき[1]右辺に到達する。途中でゼータの香りの漂う・・（その３０７）でのフーリエ級数（そこではフーリエ級数としているが、本当はフーリエ級数的な恒等式である）を使う。この[1]は、三角関数と双曲線関数の融合域（三変数）の多くの母等式の中の一つ“三変数・第一基本フーリエ・Sin 母等式”である。

$$\frac{\sin x}{e^{a}-\alpha}+\frac{\sin 2x}{e^{2a}-\alpha}+\frac{\sin 3x}{e^{3a}-\alpha}+\frac{\sin 4x}{e^{4a}-\alpha}+\cdot\cdot$$

$$=\left(\frac{\sin x}{2}\right)\left(\left(\frac{1}{\mathrm{cha}-\cos x}\right)+\alpha\left(\frac{1}{\mathrm{ch2a}-\cos x}\right)+\alpha^2\left(\frac{1}{\mathrm{ch3a}-\cos x}\right)+\alpha^3\left(\frac{1}{\mathrm{ch4a}-\cos x}\right)+\cdot\cdot\right) \quad \text{--[1]}$$

$(a>0$、$|\alpha|<e^a$, x は任意実数$)$

上式を α で 0～α まで積分して次式を得る。

$$\sin x\log\left(\frac{1}{1-\alpha e^{-a}}\right)+\sin 2x\log\left(\frac{1}{1-\alpha e^{-2a}}\right)+\sin 3x\log\left(\frac{1}{1-\alpha e^{-3a}}\right)+\cdot\cdot$$

$$=\left(\frac{\sin x}{2}\right)\left(\alpha\left(\frac{1}{\mathrm{cha}-\cos x}\right)+\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{ch2a}-\cos x}\right)+\left(\frac{\alpha^3}{3}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{ch3a}-\cos x}\right)+\left(\frac{\alpha^4}{4}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{ch4a}-\cos x}\right)+\cdot\cdot\right) \quad \text{--[2]}$$

$\left(a>0、|\alpha|<e^a,\ x \text{は任意実数}\right)$

上記[2]のｘにπ/2 を代入した後、さらにａで微分すると＜Ｐ１－３＞を得る。

$$\frac{1}{e^a-\alpha}-\frac{3}{e^{3a}-\alpha}+\frac{5}{e^{5a}-\alpha}-\frac{7}{e^{7a}-\alpha}+-\cdot\cdot$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{sha}{(cha)^2}+\frac{\alpha sh2a}{(ch2a)^2}+\frac{\alpha^2 sh3a}{(ch3a)^2}+\frac{\alpha^3 sh4a}{(ch4a)^2}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<P1-3>}$$

$(|\alpha|<e^a \text{ 且つ } a>0)$

この＜Ｐ１－３＞をαで 0～αまで積分すると、左右の辺を逆にして＜Ｐ１－４＞を得る。

$$\frac{\alpha sha}{(cha)^2}+\frac{\alpha^2 sh2a}{2(ch2a)^2}+\frac{\alpha^3 sh3a}{3(ch3a)^2}+\frac{\alpha^4 sh4a}{4(ch4a)^2}+\cdot\cdot$$

$$=2\log\left((1-\alpha e^{-a})^{-1}(1-\alpha e^{-3a})^3(1-\alpha e^{-5a})^{-5}(1-\alpha e^{-7a})^7(1-\alpha e^{-9a})^{-9}(1-\alpha e^{-11a})^{11}\cdot\cdot\right) \quad \text{-<P1-4>}$$

$(|\alpha|<e^a \text{ 且つ } a>0)$

＜Ｐ２＞に関しては、上方の[2]をｘで積分して変形を行えば＜Ｐ２＞に到達する。

$$\left((1-\alpha e^{-2a})(1-\alpha e^{-6a})^{1/3}(1-\alpha e^{-10a})^{1/5}(1-\alpha e^{-14a})^{1/7}(1-\alpha e^{-18a})^{1/9}\cdot\cdot\right)^2$$

$$=(tha)^{\alpha}(th2a)^{\alpha^2/2}(th3a)^{\alpha^3/3}(th4a)^{\alpha^4/4}(th5a)^{\alpha^5/5}(th6a)^{\alpha^6/6}\cdot\cdot \quad \text{---<P2>}$$

$(|\alpha|\leqq 1 \text{ 且つ } a>0)$

終わり。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このようにして＜Ｐ１－３＞、＜Ｐ１－４＞、＜Ｐ２＞が得られた。

さて今回、冒頭で述べたＶ(q)のべき展開係数列の生成規則がわかったので示す。まずＶ(q)の復習からすると、Ｖ(q)は＜Ｑ１－３＞右辺の

$$(1-\alpha e^{-2a})(1-\alpha e^{-4a})^2(1-\alpha e^{-6a})^3(1-\alpha e^{-8a})^4\cdot\cdot$$

において、αを 1、e^{-2a} をｑとして

$$(1-q)(1-q^2)^2(1-q^3)^3(1-q^4)^4\cdot\cdot$$

としてとり出したものであった（0<q<1)。

$$V(q)=(1-q)(1-q^2)^2(1-q^3)^3(1-q^4)^4\cdot\cdot$$

$$=1-q-2q^2-q^3+0q^4+4q^5+4q^6+7q^7+3q^8-2q^9-9q^{10}-17q^{11}-25q^{12}-24q^{13}-13q^{14}-q^{15}+32q^{16}+\cdot\cdot$$

このべき展開の係数列が気になった。

$$a0+a1q+a2q^2+a3q^3+a4q^4+a5q^5+a6q^6+\cdot\cdot$$

はたしてanの正体は何なのか？

1，-1，-2，-1，0，4，4，7，3，-2，・・・

これらはどんな規則で生成されていくのだろうか？ 答えは次である。

$$an=\left(-\frac{1}{n}\right)\sum_{n=1}^{k}\sigma_2(k)\cdot a(n-k) \quad ---[\mathrm{A}]$$

この[Ａ]の式で生成されていくとわかった！

https://oeis.org/A073592

この数列大辞典にある記述を解読し判明した。[Ａ]の $\sigma_2(n)$ は約数関数でｎの約数の２乗和を値とするものである。例えば、$\sigma_2(6)=1^2+2^2+3^2+6^2=50$

[Ａ]を使えば、

a0＝1 を起点として

a1＝-1

a2＝-2

a3＝-1

a4＝0

a5＝4

・

・

と次々とすべて得られていく。

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● V(q)の規則がわかってもそれが数学にどんな意味があるのか、現時点ではさっぱりわからない。

ラマヌジャンのΔ(z)のべき展開係数列τ(n)は、２次のゼータを生み出し２０世紀数学を動かした。

V(q)はなにに関係しているのか？

ばくぜんと双曲線ゼータというものに関係しているような気がするが、なにもわからない。ただV(q)が大事であることだけはわかる。双曲線ゼータはたぶん次のような感じのものであるはずである。

$1/(\mathrm{sh}a)^s+1/(\mathrm{sh}2a)^s+1/(\mathrm{sh}3a)^s+1/(\mathrm{sh}4a)^s\cdot\cdot$

このオイラー積がもしあれば、V(q)の係数列が関係しているのかもしれない。

● 今回の三式も興味ある形をしている。

$$\left((1-\alpha e^{-2a})(1-\alpha e^{-6a})^{1/3}(1-\alpha e^{-10a})^{1/5}(1-\alpha e^{-14a})^{1/7}(1-\alpha e^{-18a})^{1/9}\cdot\cdot\right)^2$$

$$=(\mathrm{th}a)^{\alpha}(\mathrm{th}2a)^{\alpha^2/2}(\mathrm{th}3a)^{\alpha^3/3}(\mathrm{th}4a)^{\alpha^4/4}(\mathrm{th}5a)^{\alpha^5/5}(\mathrm{th}6a)^{\alpha^6/6}\cdot\cdot \quad ---\langle \mathrm{P2}\rangle$$

$(|\alpha|\leqq 1$ 且つ $a>0)$

とくにこの＜Ｐ２＞は形が面白い。眺めていて飽きない。

今回の証明を見ても母等式が三変数なので様々な変形が可能であり、多彩な式を生み出すことができる。

母等式は六系列（六セット）ありそれにSin系とCos系に分かれているので計１２セットの母等式がある。それが三変数なのでとても多彩である。三変数域はあまりに大きくまだなにも解明できていないし、できるときも来ない。

三角関数と双曲線関数の融合域の三変数域は巨大である。その巨大さの源は<u>組み合わせの多彩さ</u>ということに尽きる。

●将棋の故・米長邦雄氏（永世棋聖）は昔テレビで「矢倉（やぐら）というのは深い。一生かかってもわからない。」と述べたことがあった（矢倉は将棋の戦法の一つ）。それを子供の頃見て「なんて奥深い世界なんだ！」と思った記憶がある。米長さんのいう深さというのは<u>組み合わせの多様さ</u>のことである。現代でも矢倉は解明されていないし、脈々と指し続けられている。三変数域の深さは矢倉のそれと同じである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2024.12.15 杉岡幹生

＜参考サイト＞

・オンライン数列辞典　https://oeis.org/A073592