＜ 三角関数と双曲線関数の融合域（その２１）＞

新たに恒等式二つと極限公式を一つ得たので下方に青色式で示す。これまでの主要なものと一緒に示した。

以下では、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。a や α は任意の実数であり、よって例えば、$(a \neq 0)$は「a は 0 でない任意の実数」を意味する。$\tan^{-1}$, th^{-1} はそれぞれ arctan, arctanh である。e は自然対数の底。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜ 恒等式 ＞

$$\frac{1}{\mathrm{ch}a-1}-\frac{1}{\mathrm{sh}a}=2\left(\frac{1}{\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}a}+\frac{1}{\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}a}+\frac{1}{\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}a}+\frac{1}{\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{------}\langle 1\rangle$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}a}-\frac{1}{\mathrm{ch}a+1}=2\left(\frac{1}{\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a}+\frac{1}{\mathrm{ch}4a+\mathrm{ch}a}+\frac{1}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a}+\frac{1}{\mathrm{ch}8a+\mathrm{ch}a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{------}\langle 2\rangle$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2(a/2)}=4\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}2a}{\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}4a}{\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{------}\langle 3\rangle$$

$$(a\neq 0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^2(a/2)}=4\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a}-\frac{\mathrm{ch}2a}{\mathrm{ch}4a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a}-\frac{\mathrm{ch}4a}{\mathrm{ch}8a+\mathrm{ch}a}+-\cdot\cdot\right) \quad \text{-----}\langle 4\rangle$$

$$(a\neq 0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}a}=2\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}a}-\frac{\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}a}-\frac{\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}a}+-\cdot\cdot\right) \quad \text{------}\langle 5\rangle$$

$$(a\neq 0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}a}=2\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}4a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}8a+\mathrm{ch}a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{------}\langle 6\rangle$$

$$(a\neq 0)$$

$$\frac{1}{e^a-1}=\left(\frac{\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}a}-1\right)-\left(\frac{\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}a}-1\right)+\left(\frac{\mathrm{sh}6a}{\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}a}-1\right)-\left(\frac{\mathrm{sh}8a}{\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}a}-1\right)+-\cdot\cdot \quad \text{---}\langle 7\text{-}1\rangle$$

$(a > 0)$

$$\frac{1}{e^{a}+1}=\left(1-\frac{sh2a}{ch2a+cha}\right)-\left(1-\frac{sh4a}{ch4a+cha}\right)+\left(1-\frac{sh6a}{ch6a+cha}\right)-\left(1-\frac{sh8a}{ch8a+cha}\right)+-\cdot\cdot$$ --<7-2>

$(a > 0)$

$$th\left(\frac{a}{2}\right)=\left(\frac{ch2a-cha}{ch2a+cha}\right)\times\left(\frac{ch4a+cha}{ch4a-cha}\right)\times\left(\frac{ch6a-cha}{ch6a+cha}\right)\times\left(\frac{ch8a+cha}{ch8a-cha}\right)\times\cdot\cdot$$ ----<E1>

$(a > 0)$

$$th\left(\frac{a}{2}\right)=\left(\frac{sh2a-sha}{sh2a+sha}\right)\times\left(\frac{sh4a-sha}{sh4a+sha}\right)\times\left(\frac{sh6a-sha}{sh6a+sha}\right)\times\left(\frac{sh8a-sha}{sh8a+sha}\right)\times\cdot\cdot$$ ----<E2>

$(a > 0)$

$$\frac{1}{sh^{2}(a/2)}=4sha\left(\frac{sh2a}{(ch2a-cha)^{2}}+\frac{sh4a}{(ch4a-cha)^{2}}+\frac{sh6a}{(ch6a-cha)^{2}}+\frac{sh8a}{(ch8a-cha)^{2}}+\cdot\cdot\right)$$ ---<G1>

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{ch^{2}(a/2)}=4sha\left(\frac{sh2a}{(ch2a+cha)^{2}}+\frac{sh4a}{(ch4a+cha)^{2}}+\frac{sh6a}{(ch6a+cha)^{2}}+\frac{sh8a}{(ch8a+cha)^{2}}+\cdot\cdot\right)$$ ---<G2>

$(a \neq 0)$

$$\frac{\alpha}{e^{a}-1}+\frac{\alpha^{3}}{3(e^{3a}-1)}+\frac{\alpha^{5}}{5(e^{5a}-1)}+\frac{\alpha^{7}}{7(e^{7a}-1)}+\cdot\cdot$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)\log\left(\frac{(1+\alpha e^{-a})(1+\alpha e^{-2a})(1+\alpha e^{-3a})(1+\alpha e^{-4a})\cdot\cdot}{(1-\alpha e^{-a})(1-\alpha e^{-2a})(1-\alpha e^{-3a})(1-\alpha e^{-4a})\cdot\cdot}\right)$$ ----<M2>

($|\alpha|<e^{a}$ 且つ $a > 0$)

$$\frac{\alpha}{e^{a}+1}+\frac{\alpha^{3}}{3(e^{3a}+1)}+\frac{\alpha^{5}}{5(e^{5a}+1)}+\frac{\alpha^{7}}{7(e^{7a}+1)}+\cdot\cdot$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)\log\left(\frac{(1+\alpha e^{-a})(1-\alpha e^{-2a})(1+\alpha e^{-3a})(1-\alpha e^{-4a})\cdot\cdot}{(1-\alpha e^{-a})(1+\alpha e^{-2a})(1-\alpha e^{-3a})(1+\alpha e^{-4a})\cdot\cdot}\right)$$ ----<N2>

($|\alpha|<e^{a}$ 且つ $a > 0$)

$$\frac{\alpha}{e^{a}+1}+\frac{\alpha^2}{2(e^{2a}+1)}+\frac{\alpha^3}{3(e^{3a}+1)}+\frac{\alpha^4}{4(e^{4a}+1)}+\cdot\cdot$$

$$=\log\left(\frac{(1-\alpha e^{-2a})(1-\alpha e^{-4a})(1-\alpha e^{-6a})(1-\alpha e^{-8a})\cdot\cdot}{(1-\alpha e^{-a})(1-\alpha e^{-3a})(1-\alpha e^{-5a})(1-\alpha e^{-7a})\cdot\cdot}\right)$$ ----<P1>

($|\alpha|<e^{a}$ 且つ $a>0$)

注記：＜Ｐ１＞は＜Ｑ１＞から導出できる、つまり＜Ｑ１＞と本質的に同値。

$$\frac{1}{e^{a}+1}-\frac{1}{2(e^{2a}+1)}+\frac{1}{3(e^{3a}+1)}-\frac{1}{4(e^{4a}+1)}+-\cdot\cdot$$

$$=\log\left(\frac{(1+e^{-a})(1+e^{-3a})(1+e^{-5a})(1+e^{-7a})\cdot\cdot}{(1+e^{-2a})(1+e^{-4a})(1+e^{-6a})(1+e^{-8a})\cdot\cdot}\right)$$ ----<P1−2>

($a>0$)

$$\frac{1}{e^{a}-1}-\frac{3}{e^{3a}-1}+\frac{5}{e^{5a}-1}-\frac{7}{e^{7a}-1}+-\cdot\cdot=\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}2a+1}+\frac{\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}4a+1}+\frac{\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}6a+1}+\frac{\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}8a+1}+\cdot\cdot$$ --<P1−3>

($a>0$)

$$\frac{1}{e^{2a}-\alpha}+\frac{2}{e^{4a}-\alpha}+\frac{3}{e^{6a}-\alpha}+\frac{4}{e^{8a}-\alpha}+\cdot\cdot=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{(\mathrm{sh}a)^2}+\frac{\alpha}{(\mathrm{sh}2a)^2}+\frac{\alpha^2}{(\mathrm{sh}3a)^2}+\frac{\alpha^3}{(\mathrm{sh}4a)^2}+\cdot\cdot\right)$$ --<Q>

($|\alpha|<e^{a}$ 且つ $a>0$)

$$\frac{\alpha}{e^{a}-1}+\frac{\alpha^2}{2(e^{2a}-1)}+\frac{\alpha^3}{3(e^{3a}-1)}+\frac{\alpha^4}{4(e^{4a}-1)}+\cdot\cdot$$

$$=\log\left(\frac{1}{(1-\alpha e^{-a})(1-\alpha e^{-2a})(1-\alpha e^{-3a})(1-\alpha e^{-4a})\cdot\cdot}\right)$$ ----<Q1>

($|\alpha|<e^{a}$ 且つ $a>0$)

$$\frac{1}{(e^{a}-1)}+\frac{1}{2(e^{2a}-1)}+\frac{1}{3(e^{3a}-1)}+\frac{1}{4(e^{4a}-1)}+\cdot\cdot$$

$$=\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-2a})(1-e^{-3a})(1-e^{-4a})\cdot\cdot}\right)$$ ----<Q1−2>

($a>0$)

$$\frac{\alpha}{(\mathrm{sh}a)^2}+\frac{\alpha^2}{2(\mathrm{sh}2a)^2}+\frac{\alpha^3}{3(\mathrm{sh}3a)^2}+\frac{\alpha^4}{4(\mathrm{sh}4a)^2}+\cdot\cdot$$

$$=4\log\left(\frac{1}{(1-\alpha e^{-2a})(1-\alpha e^{-4a})^2(1-\alpha e^{-6a})^3(1-\alpha e^{-8a})^4\cdot\cdot}\right)$$ ----<Q1−3>

$(|\alpha|<e^{2a}$ 且つ $a>0)$

$$\frac{\alpha}{(\mathrm{ch}a)^2}+\frac{\alpha^2}{2(\mathrm{ch}2a)^2}+\frac{\alpha^3}{3(\mathrm{ch}3a)^2}+\frac{\alpha^4}{4(\mathrm{ch}4a)^2}+\cdot\cdot$$

$$=4\log\left((1-\alpha e^{-2a})^{-1}(1-\alpha e^{-4a})^{2}(1-\alpha e^{-6a})^{-3}(1-\alpha e^{-8a})^{4}(1-\alpha e^{-10a})^{-5}(1-\alpha e^{-12a})^{6}\cdot\cdot\right)\quad\text{--<R1>}$$

$(-e^{2a}\leqq\alpha<e^{2a}$ 且つ $a>0)$

＜ 公式 ＞

◆√2 極限公式

$$\sqrt{2}=\lim_{a\to 0}(1+e^{-a})(1+e^{-3a})^{-1}(1+e^{-5a})(1+e^{-7a})^{-1}(1+e^{-9a})(1+e^{-11a})^{-1}\cdot\cdot\quad\text{---<N1-2>}$$

$(a>0)$

◆√2 極限公式（別バージョン）

$$\sqrt{2}=\lim_{a\to 0}(1+e^{-a})(1+e^{-2a})^{-1}(1+e^{-3a})(1+e^{-4a})^{-1}(1+e^{-5a})(1+e^{-6a})^{-1}\cdot\cdot\quad\text{---<P1-4>}$$

$(a>0)$

◆$2^{1/4}$極限公式

$$2^{1/4}=\lim_{a\to 0}(1+e^{-a})(1+e^{-2a})^{-2}(1+e^{-3a})^{3}(1+e^{-4a})^{-4}(1+e^{-5a})^{5}(1+e^{-6a})^{-6}\cdot\cdot\quad\text{---<R2>}$$

$(a>0)$

==================================

　これら三つの青色式が得られた。そのうち＜Ｑ＞と＜Ｒ１＞は、任意の二つの実変数（条件付き）から成る二変数恒等式となっている。Excel マクロの数値検証でも成立を確認した。

　＜Ｑ＞は半年前に得ていながら報告するのを忘れていたもので、三変数・第一基本フーリエ・Sin 母等式（これは私独自の呼称で下方の証明中の[1]のもの）から得られる。ここ２年あまりに多くの公式が得られたのでそのうち忘れてしまうものも多く、今回ノートを見返していて気付いた（得た公式のうち特に重要と感じるもののみ１／３ほどを報告している）。

　さらに今回、この＜Ｑ＞から＜Ｑ１－３＞が出ることにも気づいた。＜Ｑ＞をαで 0～αまで積分すれば出る。＜ゼータの香りの・・（その３４６）＞で示した導出（証明）とは違うルートで＜Ｑ１－３＞が出るとわかったのである。

　＜Ｒ１＞は今回、前回の＜ゼータの香りの・・（その３４７）＞での＜Ｒ１＞に上書したものである。今回のものは前回の＜Ｒ１＞と同値的な関係にあり、より簡明な表現の式が得られたので、こちらを採用した。この＜Ｒ１＞は、三変数・第一基本フーリエ・Cos 母等式から出る＜Ｑ１－３＞が関係する連立方程式が絡んだ複

雑な過程を経て得られた。なお＜Ｑ１－３＞から＜Ｒ１＞を辺々引き算すると、実質的に＜Ｑ１－３＞と同じものになる。よって、＜Ｒ１＞は本質的に＜Ｑ１－３＞と同値といえるのかもしれないが、この種の現象はこの領域ではよく経験する。

＜Ｒ２＞再び。

◆$2^{1/4}$極限公式

$$2^{1/4}=\lim_{a\to 0}(1+e^{-a})(1+e^{-2a})^{-2}(1+e^{-3a})^{3}(1+e^{-4a})^{-4}(1+e^{-5a})^{5}(1+e^{-6a})^{-6}\cdot\cdot \quad ---＜R2＞$$

$$(a>0)$$

この公式は恒等式ではないので＜公式＞のくくりとし、以前得た$\sqrt{2}$極限公式とともに並べた。$2^{1/4}$に収束するので$2^{1/4}$極限公式と名付けた。この＜Ｒ２＞は、＜Ｒ１＞でα=-1 として a->0 とすれば即座に出る。理論的には簡単に出るが、数値検証は大変であり、Wolfram Alpha を使ってさえ究極的なところで計算が破綻した。計算量が爆発的になるためである。それでもある程度のところまでは計算でき、まず正しいと確信できた。

なお、上方の全ての極限公式の右辺は交互に逆数が掛かっていくが、その形は興味深いものである。極限公式は直感ではとらえがたい感じのものになっている気がするがどうだろうか。

さて、＜Ｑ＞の導出方法（証明）を以下に記す。紙幅を節約するため概要のみ示した。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜Q＞の証明の概要

下式[1]の左辺から出発する。それに対し、１２年前のこちらの 2012/8/16 の[導出]と類似的な方法を使って変形していき[1]右辺に到達した。途中でゼータの香りの漂う・・（その３０７）でのフーリエ級数を使った（そこではフーリエ級数としているが、本当はフーリエ級数的な恒等式である）。この[1]は、三角関数と双曲線関数の融合域（三変数）の母等式の一つ三変数・第一基本フーリエ・Sin 母等式である。

$$\frac{\sin x}{e^{a}-\alpha}+\frac{\sin 2x}{e^{2a}-\alpha}+\frac{\sin 3x}{e^{3a}-\alpha}+\frac{\sin 4x}{e^{4a}-\alpha}+\cdot\cdot$$

$$=\left(\frac{\sin x}{2}\right)\left(\left(\frac{1}{\mathrm{ch}a-\cos x}\right)+\alpha\left(\frac{1}{\mathrm{ch}2a-\cos x}\right)+\alpha^{2}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}3a-\cos x}\right)+\alpha^{3}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}4a-\cos x}\right)+\cdot\cdot\right) \quad --[1]$$

$$(a>0、|\alpha|<e^{a},\ x\text{ は任意実数})$$

上式の両辺に 1/sinx を掛けてから x を 0 に近づけていき（x->0）、ロピタルの定理を適用した後、若干変形を行うと、目的の＜Ｑ＞が出る。

$$\frac{1}{e^{2a}-\alpha}+\frac{2}{e^{4a}-\alpha}+\frac{3}{e^{6a}-\alpha}+\frac{4}{e^{8a}-\alpha}+\cdot\cdot=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{(\mathrm{sh}a)^{2}}+\frac{\alpha}{(\mathrm{sh}2a)^{2}}+\frac{\alpha^{2}}{(\mathrm{sh}3a)^{2}}+\frac{\alpha^{3}}{(\mathrm{sh}4a)^{2}}+\cdot\cdot\right) \quad --＜Q＞$$

$$(\,|\alpha|<e^{a}\text{ 且つ }a>0\,)$$

終わり。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このようにして＜Ｑ＞が得られた。＜Ｒ１＞は略。

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● ノートを見返すと＜Ｑ１－３＞も半年前に＜Ｑ＞と同時に出していたことに気づいた。そのときは、テータ関数やその類似物に関心が薄く、「深い式」とだけメモしてそのままにしてしまっていた。関心をもって（意識的に）対象を見ないと、アンテナにひっかからない。

●「関心をもって」というのは、人間がなにかを創る上で気になっていることである。数学者の故・岡潔氏は、「数学とは情緒を表現するもの」という意味を述べている。私が敬愛する数学史家・高瀬正仁氏は青春時代にこの言葉に出会って衝撃を受けた！と述べている。意味はわからないが衝撃を受けたと。たしかに“情緒を表現する”というのはあいまい模糊として文学的で何かを感じさせる言葉であることはたしかである。

しかし、やはりわかりにくい。私はだんだんと「数学とはその人の関心を表現するものだ」と思い始めた。それは岡氏の言葉と比べ身もふたもない表現でなんの含蓄もないが、よりわかりやすいと思っている。オイラーにはオイラーの、ガウスにはガウスのそのときどきの関心があって、その関心の眼でもって対象を見ていった。なので、同じ結果を見ても数学者がまったく違う数学を展開していくことがよく数学史では起こっている。

なぜそんなことが起こるのか？というと、個々人で関心が異なるからである。

関心のないものは、アンテナにひっかからない。見ているのに見えない、同じものを見ているのに同じように見えないということが起こる。

それは数学に限ったことではなく、我々の仕事や日常にも当てはまる。人間がなしたことは、その人の関心の集積物であるといえる。

●＜Ｑ＞を再掲。

$$\frac{1}{e^{2a}-\alpha}+\frac{2}{e^{4a}-\alpha}+\frac{3}{e^{6a}-\alpha}+\frac{4}{e^{8a}-\alpha}+\cdot\cdot=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{(\mathrm{sh}a)^2}+\frac{\alpha}{(\mathrm{sh}2a)^2}+\frac{\alpha^2}{(\mathrm{sh}3a)^2}+\frac{\alpha^3}{(\mathrm{sh}4a)^2}+\cdot\cdot\right)\quad\text{--<Q>}$$

（$|\alpha|<e^a$ 且つ $a>0$）

この式でαを１とすると、以前の＜ゼータの香りの漂う・・（その３２５）＞の[1]（次式）に一致する。

$$\frac{1}{e^{2a}-1}+\frac{2}{e^{4a}-1}+\frac{3}{e^{6a}-1}+\frac{4}{e^{8a}-1}+\cdot\cdot=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{sh}^2a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^22a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^23a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^24a}+\cdot\cdot\right)\quad\text{-----[1]}$$

$(a>0)$

[1]はよい形のものだが、＜Ｑ＞はもっと豊かな内容をもっていて様々な解釈を可能としてくれる。＜Ｑ＞をある人が見たら「右辺は左辺のフーリエ級数」と見るだろうし、またある人は「αでの積分や微分ができる」と思い、また別の人は左辺がラマヌジャン式の一般化になっていると思うに違いない。

[1]は三角関数と双曲線関数の融合域の二変数域から出たが、＜Ｑ＞は同領域の三変数域から出た。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2024.12.8 杉岡幹生