＜ 三角関数と双曲線関数の融合域（その２０）＞

新たに恒等式を一つ得たので下方に青色式で示す。これまでの主要なものと一緒に示した。

＜Ｍ２＞と＜Ｎ２＞は変数変換して形を書き換え、茶色の式で表示した。

＜Ｐ１＞は＜Ｑ１＞から導出できる、つまり＜Ｑ１＞は本質的に同値であることがわかったので注記でそれを示した。形の重要性から式はそのまま置いている。＜Ｋ１＞は＜Ｐ１＞から出るとわかったので、式はそのままで記号を＜Ｋ１＞から＜Ｐ１－３＞に変えて場所も移動した。

＜Ｍ１＞は＜Ｑ１＞と同値とわかり＜Ｍ１－２＞も含め削除した。＜Ｎ１＞も＜Ｐ１＞との同値から削除した。

以下では、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。a や α は任意の実数であり、よって例えば、$(a \neq 0)$は「a は 0 でない任意の実数」を意味する。

$\tan^{-1}$, th^{-1} はそれぞれ arctan, arctanh である。e は自然対数の底。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜ 恒等式 ＞

$$\frac{1}{\mathrm{cha}-1}-\frac{1}{\mathrm{sha}}=2\left(\frac{1}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{------}<1>$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}-\frac{1}{\mathrm{cha}+1}=2\left(\frac{1}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{------}<2>$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2(a/2)}=4\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch2a}}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch4a}}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----}<3>$$

$$(a \neq 0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^2(a/2)}=4\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{ch2a}}{\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{ch4a}}{\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha}}+-\cdot\cdot\right) \quad \text{----}<4>$$

$$(a \neq 0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}=2\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+-\cdot\cdot\right) \quad \text{------}<5>$$

$$(a \neq 0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}a}=2\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}4a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}8a+\mathrm{ch}a}+\cdot\ \cdot\right)$$

------<6>

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{e^a-1}=\left(\frac{\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}a}-1\right)-\left(\frac{\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}a}-1\right)+\left(\frac{\mathrm{sh}6a}{\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}a}-1\right)-\left(\frac{\mathrm{sh}8a}{\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}a}-1\right)+-\cdot\ \cdot$$

--<7-1>

$(a > 0)$

$$\frac{1}{e^a+1}=\left(1-\frac{\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a}\right)-\left(1-\frac{\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}4a+\mathrm{ch}a}\right)+\left(1-\frac{\mathrm{sh}6a}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a}\right)-\left(1-\frac{\mathrm{sh}8a}{\mathrm{ch}8a+\mathrm{ch}a}\right)+-\cdot\ \cdot$$

--<7-2>

$(a > 0)$

$$\mathrm{th}\left(\frac{a}{2}\right)=\left(\frac{\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a}\right)\times\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}a}\right)\times\left(\frac{\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a}\right)\times\left(\frac{\mathrm{ch}8a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}a}\right)\times\cdot\ \cdot$$

----<E1>

$(a > 0)$

$$\mathrm{th}\left(\frac{a}{2}\right)=\left(\frac{\mathrm{sh}2a-\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}2a+\mathrm{sh}a}\right)\times\left(\frac{\mathrm{sh}4a-\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}4a+\mathrm{sh}a}\right)\times\left(\frac{\mathrm{sh}6a-\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}6a+\mathrm{sh}a}\right)\times\left(\frac{\mathrm{sh}8a-\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}8a+\mathrm{sh}a}\right)\times\cdot\ \cdot$$

----<E2>

$(a > 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2(a/2)}=4\mathrm{sh}a\left(\frac{\mathrm{sh}2a}{(\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}a)^2}+\frac{\mathrm{sh}4a}{(\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}a)^2}+\frac{\mathrm{sh}6a}{(\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}a)^2}+\frac{\mathrm{sh}8a}{(\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}a)^2}+\cdot\ \cdot\right)$$

---<G1>

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^2(a/2)}=4\mathrm{sh}a\left(\frac{\mathrm{sh}2a}{(\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a)^2}+\frac{\mathrm{sh}4a}{(\mathrm{ch}4a+\mathrm{ch}a)^2}+\frac{\mathrm{sh}6a}{(\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a)^2}+\frac{\mathrm{sh}8a}{(\mathrm{ch}8a+\mathrm{ch}a)^2}+\cdot\ \cdot\right)$$

---<G2>

$(a \neq 0)$

$$\frac{\alpha}{e^a-1}+\frac{\alpha^3}{3(e^{3a}-1)}+\frac{\alpha^5}{5(e^{5a}-1)}+\frac{\alpha^7}{7(e^{7a}-1)}+\cdot\ \cdot$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)\log\left(\frac{(1+\alpha e^{-a})(1+\alpha e^{-2a})(1+\alpha e^{-3a})(1+\alpha e^{-4a})\cdot\ \cdot}{(1-\alpha e^{-a})(1-\alpha e^{-2a})(1-\alpha e^{-3a})(1-\alpha e^{-4a})\cdot\ \cdot}\right)$$

-----<M2>

($|\alpha|<e^a$ 且つ $a>0$)

$$\frac{\alpha}{e^{a}+1}+\frac{\alpha^{3}}{3(e^{3a}+1)}+\frac{\alpha^{5}}{5(e^{5a}+1)}+\frac{\alpha^{7}}{7(e^{7a}+1)}+\cdot\cdot$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)\log\left(\frac{(1+\alpha e^{-a})(1-\alpha e^{-2a})(1+\alpha e^{-3a})(1-\alpha e^{-4a})\cdot\cdot}{(1-\alpha e^{-a})(1+\alpha e^{-2a})(1-\alpha e^{-3a})(1+\alpha e^{-4a})\cdot\cdot}\right)$$ ----<N2>

($|\alpha|<e^{a}$ 且つ $a>0$)

$$\frac{\alpha}{e^{a}+1}+\frac{\alpha^{2}}{2(e^{2a}+1)}+\frac{\alpha^{3}}{3(e^{3a}+1)}+\frac{\alpha^{4}}{4(e^{4a}+1)}+\cdot\cdot$$

$$=\log\left(\frac{(1-\alpha e^{-2a})(1-\alpha e^{-4a})(1-\alpha e^{-6a})(1-\alpha e^{-8a})\cdot\cdot}{(1-\alpha e^{-a})(1-\alpha e^{-3a})(1-\alpha e^{-5a})(1-\alpha e^{-7a})\cdot\cdot}\right)$$ ----<P1>

($|\alpha|<e^{a}$ 且つ $a>0$)

注記：＜Ｐ１＞は＜Ｑ１＞から導出できる、つまり＜Ｑ１＞と本質的に同値。

$$\frac{1}{e^{a}+1}-\frac{1}{2(e^{2a}+1)}+\frac{1}{3(e^{3a}+1)}-\frac{1}{4(e^{4a}+1)}+-\cdot\cdot$$

$$=\log\left(\frac{(1+e^{-a})(1+e^{-3a})(1+e^{-5a})(1+e^{-7a})\cdot\cdot}{(1+e^{-2a})(1+e^{-4a})(1+e^{-6a})(1+e^{-8a})\cdot\cdot}\right)$$ ----<P1−2>

($a>0$)

$$\frac{1}{e^{a}-1}-\frac{3}{e^{3a}-1}+\frac{5}{e^{5a}-1}-\frac{7}{e^{7a}-1}+-\cdot\cdot=\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}2a+1}+\frac{\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}4a+1}+\frac{\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}6a+1}+\frac{\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}8a+1}+\cdot\cdot$$ --<P1−3>

($a>0$)

$$\frac{\alpha}{e^{a}-1}+\frac{\alpha^{2}}{2(e^{2a}-1)}+\frac{\alpha^{3}}{3(e^{3a}-1)}+\frac{\alpha^{4}}{4(e^{4a}-1)}+\cdot\cdot$$

$$=\log\left(\frac{1}{(1-\alpha e^{-a})(1-\alpha e^{-2a})(1-\alpha e^{-3a})(1-\alpha e^{-4a})\cdot\cdot}\right)$$ ----<Q1>

($|\alpha|<e^{a}$ 且つ $a>0$)

$$\frac{1}{(e^{a}-1)}+\frac{1}{2(e^{2a}-1)}+\frac{1}{3(e^{3a}-1)}+\frac{1}{4(e^{4a}-1)}+\cdot\cdot$$

$$=\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-2a})(1-e^{-3a})(1-e^{-4a})\cdot\cdot}\right)$$ ----<Q1−2>

($a>0$)

$$\frac{\alpha}{(\mathrm{sh}a)^2}+\frac{\alpha^2}{2(\mathrm{sh}2a)^2}+\frac{\alpha^3}{3(\mathrm{sh}3a)^2}+\frac{\alpha^4}{4(\mathrm{sh}4a)^2}+\cdot\cdot$$
$$=4\log\left(\frac{1}{(1-\alpha e^{-2a})(1-\alpha e^{-4a})^2(1-\alpha e^{-6a})^3(1-\alpha e^{-8a})^4\cdot\cdot}\right)\quad\text{----}<\mathrm{Q1-3}>$$
$$(\,|\alpha|<e^{2a}\ \text{且つ}\ a>0\,)$$

$$\frac{\alpha\,\mathrm{ch}a}{(\mathrm{sh}a)^2}-\frac{\alpha^2\mathrm{ch}2a}{2(\mathrm{sh}2a)^2}+\frac{\alpha^3\mathrm{ch}3a}{3(\mathrm{sh}3a)^2}-\frac{\alpha^4\mathrm{ch}4a}{4(\mathrm{sh}4a)^2}+-\cdot\cdot$$
$$=2\log\left((1+\alpha e^{-a})(1+\alpha e^{-3a})^3(1+\alpha e^{-5a})^5(1+\alpha e^{-7a})^7\cdot\cdot\right)\quad\text{----}<\mathrm{R1}>$$
$$(-e^{a}<\alpha\leqq e^{a}\ \text{且つ}\ a>0\,)$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

最後の青色式＜Ｒ１＞が得られた。任意の二つの実変数（条件付き）から成るので二変数の恒等式となっている。

これは前回示した＜Ｑ１－３＞の証明の類似の方法で得られるが、三変数・第六基本フーリエ Cos 母等式（私独自の用語）という母等式をαで積分して得た式に、ロピタルの定理を適用して得られた（詳細は略）。なお、＜Ｒ１＞は、さまざまな値を代入して Excel での数値検証でも成り立つことを確認している。

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●　＜Ｑ１－３＞と＜Ｒ１＞を並べよう。

$$\frac{\alpha}{(\mathrm{sh}a)^2}+\frac{\alpha^2}{2(\mathrm{sh}2a)^2}+\frac{\alpha^3}{3(\mathrm{sh}3a)^2}+\frac{\alpha^4}{4(\mathrm{sh}4a)^2}+\cdot\cdot$$
$$=4\log\left(\frac{1}{(1-\alpha e^{-2a})(1-\alpha e^{-4a})^2(1-\alpha e^{-6a})^3(1-\alpha e^{-8a})^4\cdot\cdot}\right)\quad\text{----}<\mathrm{Q1-3}>$$
$$(\,|\alpha|<e^{2a}\ \text{且つ}\ a>0\,)$$

$$\frac{\alpha\,\mathrm{ch}a}{(\mathrm{sh}a)^2}-\frac{\alpha^2\mathrm{ch}2a}{2(\mathrm{sh}2a)^2}+\frac{\alpha^3\mathrm{ch}3a}{3(\mathrm{sh}3a)^2}-\frac{\alpha^4\mathrm{ch}4a}{4(\mathrm{sh}4a)^2}+-\cdot\cdot$$
$$=2\log\left((1+\alpha e^{-a})(1+\alpha e^{-3a})^3(1+\alpha e^{-5a})^5(1+\alpha e^{-7a})^7\cdot\cdot\right)\quad\text{----}<\mathrm{R1}>$$
$$(-e^{a}<\alpha\leqq e^{a}\ \text{且つ}\ a>0\,)$$

これらは兄弟分のように感じられ、＜Ｑ１－３＞から＜Ｒ１＞が導出できるような気もしているが、まだわからない。

両者とも左辺はゼータの香りが漂っている。右辺はきわめて興味ある形をしている。両者は他の式たちよりもう一段深いところから来ていると感じる。

●前回見たように＜Ｑ１－３＞で$\alpha=1$として、e^{-2a}を q とすると、右辺 log 中の分母式は

$$(1-q)(1-q^2)^2(1-q^3)^3(1-q^4)^4\cdot\cdot$$

と同じである（0<q<1）。これをV(q)とおくことにしよう。

$$V(q)=(1-q)(1-q^2)^2(1-q^3)^3(1-q^4)^4\cdot\cdot$$

展開すると、次となる。

$$V(q)=1-q-2q^2-q^3+0q^4+4q^5+4q^6+7q^7+3q^8-2q^9-9q^{10}-17q^{11}-25q^{12}-24q^{13}-13q^{14}-q^{15}+32q^{16}+\cdot\cdot$$

V(q)をWolfram Alphaを使って展開したらオンライン整数列大辞典を提示してきて上記のようになった。手計算ではとても無理だが、文明の利器を使うと即座に出た。

その大辞典では、上記係数列は、Euler transform of negative integersとのことである。式中での“$+0q^4$”は本来は略すべきところだが、数列を強調したく0を明示した。

上記係数列は、深いものにつながっていると考えられる。

●「クロネッカー[１]　青春の夢と楕円関数」（高瀬正仁著、現代数学社）という本を読んだ。

数学史家の高瀬正仁氏の新刊である。クロネッカーの楕円関数の論文を紹介するものだが、付録の「オイラーの楕円関数論　加法定理への道を開く」に惹かれた。この本は付録の価値が高い！ 付録だけで73頁もある。

ファニャノの結果をヒントに、オイラーは懸案だった微分方程式の解を見つけることができた。そして一歩一歩着実に解を一般的な状況へと高めていく過程に感動した。地に足のついた数学であり、現代数学が忘れた本物がここにある。オイラーは微分方程式の解（積分）に関心があったのだが、付随的に楕円積分の加法定理も発見している。

最後にこうある。P.255～256　　・・は略した。

「・・にはレムニスケート積分の加法定理が包摂されていることを，オイラーは発見した。微分方程式から派生しためざましい事実であり、・・オイラーはファニャノをこえてはるかに遠い地点まで歩を進めたが，後年のガウスやアーベルがそうしたように，一般にn等分方程式を書き下してその代数的可解性を考察するという方向に進むことはなかった。オイラーの微分方程式論の視点に立てばレムニスケート積分の加法定理はいわば副産物であり，・・。だが楕円関数論の名に相応しい理論が誕生するためには理論形成の可能性を内包する萌芽の発見が必要である。レムニスケート積分の加法定理は十分にその役割を担い，ガウスとアーベルの手に継承されて今に続く楕円関数論の礎石になったのである。」

高瀬氏のこの文にも感動した。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2024.12.1 杉岡幹生

<参考文献 or 参考サイト>

・「クロネッカー[１]　青春の夢と楕円関数」（高瀬正仁著、現代数学社）