

＜ 三角関数と双曲線関数の融合域（その19） ＞

新たに恒等式を二つ得たので下方に青色式で示す。これまでの主要なものと一緒に示した。

今回二変数恒等式の＜Q1＞が新たに得られたことで、これまでの＜F1＞は＜Q1＞から出る式ということになった。よって＜F1＞は＜Q1-2＞と記号を変え、＜Q1＞の子供式としての位置づけとした。場所も＜Q1＞のすぐ後ろに変えた。

なお、前回まで示していた＜Q1＞は今回の＜Q1＞から変形で出る式となり形がやや複雑なこともあって削除した。つまり前回までの＜Q1＞を今回の＜Q1＞で置き換えた。

また＜M2＞、＜N2＞についてはその右辺を、前回の最後に示唆したようにテータ関数類似物の形に書き換え（同値変形）、それら二式は茶色式で表現した。

以下では、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a) のことである。a や α は任意の実数であり、よって例えば、(a ≠ 0) は「a は 0 でない任意の実数」を意味する。tan⁻¹, th⁻¹ はそれぞれ arctan, arctanh である。e は自然対数の底。

=====

＜ 恒等式 ＞

$$\frac{1}{\text{cha}-1} - \frac{1}{\text{sha}} = 2 \left(\frac{1}{\text{ch}2a-\text{cha}} + \frac{1}{\text{ch}4a-\text{cha}} + \frac{1}{\text{ch}6a-\text{cha}} + \frac{1}{\text{ch}8a-\text{cha}} + \dots \right) \quad \text{----} \langle 1 \rangle$$

(a > 0)

$$\frac{1}{\text{sha}} - \frac{1}{\text{cha}+1} = 2 \left(\frac{1}{\text{ch}2a+\text{cha}} + \frac{1}{\text{ch}4a+\text{cha}} + \frac{1}{\text{ch}6a+\text{cha}} + \frac{1}{\text{ch}8a+\text{cha}} + \dots \right) \quad \text{----} \langle 2 \rangle$$

(a > 0)

$$\frac{1}{\text{sh}^2(a/2)} = 4 \left(\frac{\text{cha}}{\text{ch}2a-\text{cha}} + \frac{\text{ch}2a}{\text{ch}4a-\text{cha}} + \frac{\text{ch}3a}{\text{ch}6a-\text{cha}} + \frac{\text{ch}4a}{\text{ch}8a-\text{cha}} + \dots \right) \quad \text{----} \langle 3 \rangle$$

(a ≠ 0)

$$\frac{1}{\text{ch}^2(a/2)} = 4 \left(\frac{\text{cha}}{\text{ch}2a+\text{cha}} - \frac{\text{ch}2a}{\text{ch}4a+\text{cha}} + \frac{\text{ch}3a}{\text{ch}6a+\text{cha}} - \frac{\text{ch}4a}{\text{ch}8a+\text{cha}} + \dots \right) \quad \text{----} \langle 4 \rangle$$

(a ≠ 0)

$$\frac{1}{\text{sha}} = 2 \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}2a-\text{cha}} - \frac{\text{sh}2a}{\text{ch}4a-\text{cha}} + \frac{\text{sh}3a}{\text{ch}6a-\text{cha}} - \frac{\text{sh}4a}{\text{ch}8a-\text{cha}} + \dots \right) \quad \text{----} \langle 5 \rangle$$

(a ≠ 0)

$$\frac{1}{\text{sha}} = 2 \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}2a+\text{cha}} + \frac{\text{sh}2a}{\text{ch}4a+\text{cha}} + \frac{\text{sh}3a}{\text{ch}6a+\text{cha}} + \frac{\text{sh}4a}{\text{ch}8a+\text{cha}} + \dots \right) \quad \text{-----} \langle 6 \rangle$$

(a ≠ 0)

$$\frac{1}{e^a-1} = \left(\frac{\text{sh}2a}{\text{ch}2a-\text{cha}} - 1 \right) - \left(\frac{\text{sh}4a}{\text{ch}4a-\text{cha}} - 1 \right) + \left(\frac{\text{sh}6a}{\text{ch}6a-\text{cha}} - 1 \right) - \left(\frac{\text{sh}8a}{\text{ch}8a-\text{cha}} - 1 \right) + \dots \quad \text{---} \langle 7-1 \rangle$$

(a > 0)

$$\frac{1}{e^{a+1}} = \left(1 - \frac{\text{sh}2a}{\text{ch}2a+\text{cha}} \right) - \left(1 - \frac{\text{sh}4a}{\text{ch}4a+\text{cha}} \right) + \left(1 - \frac{\text{sh}6a}{\text{ch}6a+\text{cha}} \right) - \left(1 - \frac{\text{sh}8a}{\text{ch}8a+\text{cha}} \right) + \dots \quad \text{---} \langle 7-2 \rangle$$

(a > 0)

$$\text{th} \left(\frac{a}{2} \right) = \left(\frac{\text{ch}2a-\text{cha}}{\text{ch}2a+\text{cha}} \right) \times \left(\frac{\text{ch}4a+\text{cha}}{\text{ch}4a-\text{cha}} \right) \times \left(\frac{\text{ch}6a-\text{cha}}{\text{ch}6a+\text{cha}} \right) \times \left(\frac{\text{ch}8a+\text{cha}}{\text{ch}8a-\text{cha}} \right) \times \dots \quad \text{---} \langle E1 \rangle$$

(a > 0)

$$\text{th} \left(\frac{a}{2} \right) = \left(\frac{\text{sh}2a-\text{sha}}{\text{sh}2a+\text{sha}} \right) \times \left(\frac{\text{sh}4a-\text{sha}}{\text{sh}4a+\text{sha}} \right) \times \left(\frac{\text{sh}6a-\text{sha}}{\text{sh}6a+\text{sha}} \right) \times \left(\frac{\text{sh}8a-\text{sha}}{\text{sh}8a+\text{sha}} \right) \times \dots \quad \text{---} \langle E2 \rangle$$

(a > 0)

$$\frac{1}{\text{sh}^2(a/2)} = 4\text{sha} \left(\frac{\text{sh}2a}{(\text{ch}2a-\text{cha})^2} + \frac{\text{sh}4a}{(\text{ch}4a-\text{cha})^2} + \frac{\text{sh}6a}{(\text{ch}6a-\text{cha})^2} + \frac{\text{sh}8a}{(\text{ch}8a-\text{cha})^2} + \dots \right) \quad \text{---} \langle G1 \rangle$$

(a ≠ 0)

$$\frac{1}{\text{ch}^2(a/2)} = 4\text{sha} \left(\frac{\text{sh}2a}{(\text{ch}2a+\text{cha})^2} + \frac{\text{sh}4a}{(\text{ch}4a+\text{cha})^2} + \frac{\text{sh}6a}{(\text{ch}6a+\text{cha})^2} + \frac{\text{sh}8a}{(\text{ch}8a+\text{cha})^2} + \dots \right) \quad \text{---} \langle G2 \rangle$$

(a ≠ 0)

$$\frac{1}{e^a-1} - \frac{3}{e^{3a}-1} + \frac{5}{e^{5a}-1} - \frac{7}{e^{7a}-1} + \dots = \frac{\text{sha}}{\text{ch}2a+1} + \frac{\text{sh}2a}{\text{ch}4a+1} + \frac{\text{sh}3a}{\text{ch}6a+1} + \frac{\text{sh}4a}{\text{ch}8a+1} + \dots \quad \text{---} \langle K1 \rangle$$

(a > 0)

$$\frac{\alpha}{\text{sha}} + \frac{\alpha^2}{2\text{sh}2a} + \frac{\alpha^3}{3\text{sh}3a} + \frac{\alpha^4}{4\text{sh}4a} + \dots$$

$$= 2\log\left(\frac{1}{(1-\alpha e^{-a})(1-\alpha e^{-3a})(1-\alpha e^{-5a})(1-\alpha e^{-7a})\dots}\right) \text{----<M1>}$$

($|\alpha| < e^a$ 且 $a > 0$)

$$\frac{1}{\text{sha}} - \frac{1}{2\text{sh}2a} + \frac{1}{3\text{sh}3a} - \frac{1}{4\text{sh}4a} + \dots$$

$$= 2\log\left((1+e^{-a})(1+e^{-3a})(1+e^{-5a})(1+e^{-7a})\dots\right) \text{----<M1-2>}$$

($a > 0$)

$$\frac{\alpha}{\text{sha}} + \frac{\alpha^3}{3\text{sh}3a} + \frac{\alpha^5}{5\text{sh}5a} + \frac{\alpha^7}{7\text{sh}7a} + \dots$$

$$= \log\left(\frac{(1+\alpha e^{-a})(1+\alpha e^{-3a})(1+\alpha e^{-5a})(1+\alpha e^{-7a})\dots}{(1-\alpha e^{-a})(1-\alpha e^{-3a})(1-\alpha e^{-5a})(1-\alpha e^{-7a})\dots}\right) \text{----<M2>}$$

($|\alpha| < e^a$ 且 $a > 0$)

$$\frac{\alpha}{\text{cha}} + \frac{\alpha^2}{2\text{ch}2a} + \frac{\alpha^3}{3\text{ch}3a} + \frac{\alpha^4}{4\text{ch}4a} + \dots$$

$$= 2\log\left(\frac{(1-\alpha e^{-3a})(1-\alpha e^{-7a})(1-\alpha e^{-11a})(1-\alpha e^{-15a})\dots}{(1-\alpha e^{-a})(1-\alpha e^{-5a})(1-\alpha e^{-9a})(1-\alpha e^{-13a})\dots}\right) \text{----<N1>}$$

($|\alpha| < e^a$ 且 $a > 0$)

$$\frac{\alpha}{\text{cha}} + \frac{\alpha^3}{3\text{ch}3a} + \frac{\alpha^5}{5\text{ch}5a} + \frac{\alpha^7}{7\text{ch}7a} + \dots$$

$$= \log\left(\frac{(1+\alpha e^{-a})(1-\alpha e^{-3a})(1+\alpha e^{-5a})(1-\alpha e^{-7a})\dots}{(1-\alpha e^{-a})(1+\alpha e^{-3a})(1-\alpha e^{-5a})(1+\alpha e^{-7a})\dots}\right) \text{----<N2>}$$

($|\alpha| < e^a$ 且 $a > 0$)

$$\frac{\alpha}{e^a+1} + \left(\frac{\alpha^2}{2}\right)\frac{1}{e^{2a}+1} + \left(\frac{\alpha^3}{3}\right)\frac{1}{e^{3a}+1} + \left(\frac{\alpha^4}{4}\right)\frac{1}{e^{4a}+1} + \dots$$

$$= \log\left(\frac{(1-\alpha e^{-2a})(1-\alpha e^{-4a})(1-\alpha e^{-6a})(1-\alpha e^{-8a})\dots}{(1-\alpha e^{-a})(1-\alpha e^{-3a})(1-\alpha e^{-5a})(1-\alpha e^{-7a})\dots}\right) \text{----<P1>}$$

($|\alpha| < e^a$ 且 $a > 0$)

$$\frac{1}{e^a+1} - \frac{1}{2(e^{2a}+1)} + \frac{1}{3(e^{3a}+1)} - \frac{1}{4(e^{4a}+1)} + \dots$$

$$= \log \left(\frac{(1+e^{-a})(1+e^{-3a})(1+e^{-5a})(1+e^{-7a}) \dots}{(1+e^{-2a})(1+e^{-4a})(1+e^{-6a})(1+e^{-8a}) \dots} \right) \text{ ----<P1-2>}$$

(a > 0)

$$\frac{\alpha}{e^a-1} + \left(\frac{\alpha^2}{2}\right) \frac{1}{e^{2a}-1} + \left(\frac{\alpha^3}{3}\right) \frac{1}{e^{3a}-1} + \left(\frac{\alpha^4}{4}\right) \frac{1}{e^{4a}-1} + \dots$$

$$= \log \left(\frac{1}{(1-\alpha e^{-a})(1-\alpha e^{-2a})(1-\alpha e^{-3a})(1-\alpha e^{-4a}) \dots} \right) \text{ ----<Q1>}$$

(|\alpha| < e^a 且つ a > 0)

$$\frac{1}{(e^a-1)} + \frac{1}{2(e^{2a}-1)} + \frac{1}{3(e^{3a}-1)} + \frac{1}{4(e^{4a}-1)} + \dots$$

$$= \log \left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-2a})(1-e^{-3a})(1-e^{-4a}) \dots} \right) \text{ ----<Q1-2>}$$

(a > 0)

$$\frac{\alpha}{(\text{sha})^2} + \frac{\alpha^2}{2(\text{sh}2a)^2} + \frac{\alpha^3}{3(\text{sh}3a)^2} + \frac{\alpha^4}{4(\text{sh}4a)^2} + \dots$$

$$= 4 \log \left(\frac{1}{(1-\alpha e^{-2a})(1-\alpha e^{-4a})^2(1-\alpha e^{-6a})^3(1-\alpha e^{-8a})^4 \dots} \right) \text{ ----<Q1-3>}$$

(|\alpha| < e^{2a} 且つ a > 0)

=====

これらの二つの青色式が得られた。

<Q1>と<Q1-3>は、任意の二つの実変数（条件付き）から成るので、二変数の恒等式となっている。両者とも一般的で重要な式である。いずれも Excel での数値検証で成り立つことを確認している。

冒頭で述べたように<Q1-2>は、これまでの<F1>そのものであり、<Q1>のαを1として即座に出る。

茶色の式は、冒頭での通り、これまでの式を右辺のみ同値変形したものである。

さて、<Q1-3>は<Q1>から導くことができるが、上記一連の恒等式の中で最も深い式であると感じる。<Q1-3>はそれ以外の式たちよりもう一段階深いところから来ている、得られた瞬間、すばらしい式が出たと思った。左辺はゼータの香りが漂っている。右辺の log の中は異次元のテータ関数類似物のように見え、得体のしれないエネルギーをもったような形をしている。

<Q1>と<Q1-3>の導出方法（証明）を以下に記す。紙幅を節約するため概要のみ示した。

=====

<Q1>と<Q1-3>の証明の概要

下式[1]の左辺から出発する。それに対し、12年前の[こちらの](#)2012/8/16の[導出]と類似的な方法を使って変形していき[1]右辺に到達した。途中で[ゼータの香りの漂う・・・\(その307\)](#)でのフーリエ級数を使った(ここではフーリエ級数としているが、本当はフーリエ級数的な恒等式である)。この[1]は、三角関数と双曲線関数の融合域(三変数)の母等式の一つである。

$$\frac{\cos x}{e^a - \alpha} + \frac{\cos 2x}{e^{2a} - \alpha} + \frac{\cos 3x}{e^{3a} - \alpha} + \frac{\cos 4x}{e^{4a} - \alpha} + \dots$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) \left(\left(-1 + \frac{\text{sha}}{\text{cha} - \cos x}\right) + \alpha \left(-1 + \frac{\text{sh}2a}{\text{ch}2a - \cos x}\right) + \alpha^2 \left(-1 + \frac{\text{sh}3a}{\text{ch}3a - \cos x}\right) + \alpha^3 \left(-1 + \frac{\text{sh}4a}{\text{ch}4a - \cos x}\right) + \dots \right) \text{---[1]}$$

(a > 0, |α| < e^a, x は任意実数)

上式に対し両辺を0~αの範囲でαで積分して次の[2]を得る。

$$\cos x \cdot \log(1 - \alpha/e^a) + \cos 2x \cdot \log(1 - \alpha/e^{2a}) + \cos 3x \cdot \log(1 - \alpha/e^{3a}) + \dots$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) \left(\alpha \left(-1 + \frac{\text{sha}}{\text{cha} - \cos x}\right) + \left(\frac{\alpha^2}{2}\right) \left(-1 + \frac{\text{sh}2a}{\text{ch}2a - \cos x}\right) + \left(\frac{\alpha^3}{3}\right) \left(-1 + \frac{\text{sh}3a}{\text{ch}3a - \cos x}\right) + \dots \right) \text{---[2]}$$

(a > 0, |α| < e^a, x は任意実数)

上式のxに0を代入して、式変形を行えば<Q1>を得る。これで<Q1>が出た。

その<Q1>をaで微分して得られた式に対し、さらに0~αの範囲でαで積分して得た式にa=2aなどの変数変換を行えば<Q1-3>に到達する。

終わり。

=====

このようにして<Q1>と<Q1-3>が得られた。

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

=====

● <Q1-3>を眺めたい。

$$\frac{\alpha}{(\text{sha})^2} + \frac{\alpha^2}{2(\text{sh}2a)^2} + \frac{\alpha^3}{3(\text{sh}3a)^2} + \frac{\alpha^4}{4(\text{sh}4a)^2} + \dots$$

$$= 4 \log \left(\frac{1}{(1 - \alpha e^{-2a})(1 - \alpha e^{-4a})^2(1 - \alpha e^{-6a})^3(1 - \alpha e^{-8a})^4 \dots} \right) \text{---<Q1-3>}$$

(|α| < e^{2a} 且つ a > 0)

これが得られたときは驚き、暗い地下階段の扉が開かれたと思った。左辺も面白いが、右辺がとんでもなく興味ある形をしていて、新しい領域をかき間みさせてくれている気がする。

●<M2>と<Q1-3>を並べたい。

$$\frac{\alpha}{\text{sha}} + \frac{\alpha^3}{3\text{sh}3a} + \frac{\alpha^5}{5\text{sh}5a} + \frac{\alpha^7}{7\text{sh}7a} + \dots$$

$$= \log \left(\frac{(1+\alpha e^{-a})(1+\alpha e^{-3a})(1+\alpha e^{-5a})(1+\alpha e^{-7a}) \dots}{(1-\alpha e^{-a})(1-\alpha e^{-3a})(1-\alpha e^{-5a})(1-\alpha e^{-7a}) \dots} \right) \text{----<M2>}$$

(|α| < e^a 且つ a > 0)

$$\frac{\alpha}{(\text{sha})^2} + \frac{\alpha^2}{2(\text{sh}2a)^2} + \frac{\alpha^3}{3(\text{sh}3a)^2} + \frac{\alpha^4}{4(\text{sh}4a)^2} + \dots$$

$$= 4 \log \left(\frac{1}{(1-\alpha e^{-2a})(1-\alpha e^{-4a})^2(1-\alpha e^{-6a})^3(1-\alpha e^{-8a})^4 \dots} \right) \text{----<Q1-3>}$$

(|α| < e^{2a} 且つ a > 0)

左辺に着目すると、<M2>も深いが、<Q1-3>はもっと深い。

●<Q1-3>の右辺の

$$(1 - \alpha e^{-2a})(1 - \alpha e^{-4a})^2(1 - \alpha e^{-6a})^3(1 - \alpha e^{-8a})^4 \dots$$

がよいものである。α=1として、e^{-2a}をqとすると、上は

$$(1 - q)(1 - q^2)^2(1 - q^3)^3(1 - q^4)^4 \dots$$

と同じである (0 < q < 1)。これをV(q)とおくことにしよう。

$$V(q) = (1 - q)(1 - q^2)^2(1 - q^3)^3(1 - q^4)^4 \dots$$

このV(q)自体は既に研究されているような気がする。おそらくヤコビかガウスかデデキントあたりが調べている気がするが、まったくわからない(ガウスは未公表)。私がつ公式集や保型形式の本には出てこない。どこかの文献にあるのかもしれないが、不明である。

●ガウスは、楕円関数やモジュラー関数にまで到達する研究を行っておきながら、結局、それらの研究は未公表となった。アーベルやヤコビよりずっと先行する形で研究を行っていたことが、残された研究資料から分かっている。私はそれを「近世数学史談」(高木貞治著)から知った。

ガウスは楕円関数を含めた研究成果を本で出版したいことを事前に示唆しておきながら、なぜ未公表になったのか? 巷ではガウスの秘密主義をよく言われるが、たぶんそれは違っている。

おそらく高木氏の推測が当たっている。

同書 p. 56~57 から抜粋。“・・・”部分は略した。

『ガウスは既にこの modular function $k'(\tau)$ の理論を組み立てて、その基本区域まで描いている。・・五十年後にガウス全集を編纂した Schering にもよく分からなかったような始末である。Modular function を持っていた所に於いて、ガウスは遠くアーベル及びヤコービを凌駕している。ガウスに於いては楕円函数ばかりが問題の全部ではなかったのである。現今 $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ で表される級数・・及びそれが満足せしめる所謂ガウスの微分方程式は・・、追々研究が進む間に函数 $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ と agM 又は modular function との関係が知られて来たので、 $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ を出発点に置いて例の大著述を組み立てようと決心したのもあろう。その立場は冪級数 $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ に由って定義せられる函数の研究であるが、其処でガウスは既に解析的延長の問題に逢着している。ガウスがその問題を解決していたかどうかは明白でないが、このようにそれからそれへと考察の範囲が拡大されて行くのでは、何時になっても完結の期は来たらぬであろう。例の大著述が出ずにしまった原因を我々は想像し得るように感ずる。』

このように高木氏は推測しているが、おそらくその通りと思う。

「近世数学史談」を読み、ガウスのイメージ力は凄まじいとわかった。わずかな事実から遠方の大山脈をパノラマとして見通すような人だったようで、「それからそれへ・・」はわかる。

なるほど、である。

そんなに凄い人ならさぞかし幸せだったろうと私たちは想像するが、それも間違いではあることが史談を読むとわかる。

ガウスは雑事に追われすぎ生活苦もあって「こんなにして活着ているよりは死んでしまうのがました」などと計算のごたごたの中に書いている。（「活」は本のまま） ガウスは名が知られてから生涯苦しみ続けている。

定説など当てにならないとよく感じる。高木貞治氏やまた高瀬正仁氏の数学史を読むと、定説とはまるで違った世界が見えてくる。

=====

2024. 11. 23 杉岡幹生

<参考文献 or 参考サイト>

- ・「近世数学史談」（高木貞治著、共立出版）
- ・「数論Ⅱ」（黒川、栗原、斎藤著、岩波書店）
- ・[可積分系とコマ（その17）](http://ikuro-kotaro.sakura.ne.jp)（ikuro-kotaro.sakura.ne.jp）
- ・[テータ関数, イータ関数の特殊値を求める | Mathlog](#)