＜ 三角関数と双曲線関数の融合域　その５ ＞

新種と考えられる積分式（と変換公式）が得られたので、下方に青色で示す。

追加した変換公式[6-a]は＜ゼータの香りの・・（その３０９）＞の最後で示したものだが、「これは変換公式の一種だ」と改めて気づいたので、今回＜(積分)変換公式＞の最後に追加した。

既出の[E1]、[E2]、[E3]は同値的な変更を加えた。[E1]、[E2]、[E3]は a を 1/a に置き換えた。さらに[E1] 、[E2]は公式集からの級数部分も加えた(真ん中の式)。

今回の一連の式は、ゼータの香りの漂う公式に関連するので、[ゼータの香りの漂う公式に関連した式]というカテゴリにまとめた。

これまでの積分式も一緒に示したが、紙幅を節約したく、積分式では前回の変換公式で変換できるものは省いた。すなわち、変換公式を中心に据えたということである。記法はそのままとしたので欠番が増えている。

なお、以降において、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。$\tan^{-1}$, th^{-1} はそれぞれ arctan, arctanh。log は自然対数。L(1)、L(2)、Z(2)は次のものである。

$$L(1)=1-1/3+1/5-1/7+-\cdots=\pi/4$$

$$L(2)=1-1/3^2+1/5^2-1/7^2+-\cdots=0.91596559\cdots=\text{カタランの定数}$$

$$Z(2)=(3/4)\zeta(2)=1+1/3^2+1/5^2+1/7^2+\cdots=\pi^2/8$$

Z(s)は、私が独自に使っているもので、$Z(s)=1+1/3^s+1/5^s+1/7^s+\cdots=(1-1/2^s)\zeta(s)$ であり、本質的に ζ(s)そのものである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜ 積分式 ＞

$$\log 2=((a^2+1)/2)\int_0^\infty \frac{\sin x}{\mathrm{ch}ax+\cos x}dx \qquad \text{-----[A3]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$\log 2=((a^2-1)/2)\int_0^\infty \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}ax+\mathrm{ch}x}dx \qquad \text{-----[A5]}$$

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$\pi=\int_0^\infty (1/a)\log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\sin a}{\mathrm{ch}x-\sin a}\right)dx \qquad \text{-----[B3]}$$

(a は $0<|a|\leq\pi/2$ を満たす任意の実数。 $a\to 0$ でも式は成立。)

$$L(1)=\pi/4=(a^2+1)\int_0^\infty \frac{\sin x\cdot \mathrm{sh}ax}{\mathrm{ch}2ax+\cos 2x}dx \qquad \text{-----[B4]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$L(1)=\pi/4=(a^2-1)\int_0^{\infty}\frac{shx\cdot shax}{ch2ax+ch2x}dx \quad \text{-----[B6]}$$

（a は 1 より大きい任意の実数）

$$Z(2)=\pi^2/8=((a^2+1)/2)\int_0^{\infty}\tan^{-1}\left(\frac{sinx}{shax}\right)dx \quad \text{------[C8]}$$

（a は 0 より大きい任意の実数）

$$Z(2)=\pi^2/8=((a^2-1)/2)\int_0^{\infty}th^{-1}\left(\frac{shx}{shax}\right)dx \quad \text{------[C10]}$$

（a は 1 より大きい任意の実数）

$$\zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdot\cdot=\pi^2/6=((a^2-1)/(2a))\int_0^{\infty}\{ax-\log(2(chax-chx))\}dx \quad \text{---[C13]}$$

（a は 1 より大きい任意の実数）

$$\zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdot\cdot=\pi^2/6=((a^2+1)/(2a))\int_0^{\infty}\{ax-\log(2(chax-cosx))\}dx \quad \text{---[C15]}$$

（a は 0 より大きい任意の実数）

$$L(2)=((a^2-1)/2)\int_0^{\infty}\tan^{-1}\left(\frac{shx}{chax}\right)dx \quad \text{-------[D7]}$$

（a は、|a|が 1 より大きい任意の実数）

$$L(2)=((a^2+1)/4)\int_0^{\infty}\log\left(\frac{chax+sinx}{chax-sinx}\right)dx \quad \text{------[D11]}$$

（a は 0 でない任意の実数）

$$a(2\pi-a)/2=\int_0^{\infty}\log\left(\frac{chx-cosa}{chx-1}\right)dx \quad \text{-----[I a-1]}$$

（a は 0≦a≦2π を満たす任意の実数）

$$\frac{cosa}{1^3}+\frac{cos3a}{3^3}+\frac{cos5a}{5^3}+\frac{cos7a}{7^3}+\cdot\cdot=\int_0^{\infty}\left(\frac{x}{4}\right)\log\left(\frac{chx+cosa}{chx-cosa}\right)dx \quad \text{-----[I a-2]}$$

（a は任意の実数。cosa は cos(a) のこと）

$$\frac{cosa}{1^3}+\frac{cos3a}{3^3}+\frac{cos5a}{5^3}+\frac{cos7a}{7^3}+\cdot\cdot=\int_0^{\infty}\frac{cosa\cdot x^2\cdot shx}{2(ch2x-cos2a)}dx \quad \text{----[I a-2-2]}$$

（a は任意の実数）　注意：この式は[I a – 2]と本質的に同値である

$$\frac{\sin a}{1^2}+\frac{\sin 3a}{3^2}+\frac{\sin 5a}{5^2}+\frac{\sin 7a}{7^2}+\cdot\cdot=\int_0^{\infty}\frac{\sin a\cdot x\cdot \mathrm{ch}x}{\mathrm{ch}2x-\cos 2a}dx \quad \text{-----[I a-3]}$$

(a は任意の実数) 注意:この式は[I a – 3 – 2]と本質的に同値である

$$\frac{\sin a}{1^2}+\frac{\sin 3a}{3^2}+\frac{\sin 5a}{5^2}+\frac{\sin 7a}{7^2}+\cdot\cdot=\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)\tan^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{sh}x}\right)dx \quad \text{----[I a-3-2]}$$

(a は任意の実数)

$$\frac{\sin a}{1^4}+\frac{\sin 3a}{3^4}+\frac{\sin 5a}{5^4}+\frac{\sin 7a}{7^4}+\cdot\cdot=\int_0^{\infty}\left(\frac{x^2}{4}\right)\tan^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{sh}x}\right)dx \quad \text{----[I a-4]}$$

(a は任意の実数)

$$\frac{\sin a}{1^4}+\frac{\sin 3a}{3^4}+\frac{\sin 5a}{5^4}+\frac{\sin 7a}{7^4}+\cdot\cdot=\int_0^{\infty}\frac{\sin a\cdot x^3\cdot \mathrm{ch}x}{6(\mathrm{ch}2x-\cos 2a)}dx \quad \text{-----[I a-4-2]}$$

(a は任意の実数) 注意:この式は[I a – 4]と本質的に同値と考えられる

$$\frac{\cos a}{1^5}+\frac{\cos 3a}{3^5}+\frac{\cos 5a}{5^5}+\frac{\cos 7a}{7^5}+\cdot\cdot=\int_0^{\infty}\left(\frac{x^3}{24}\right)\log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\cos a}{\mathrm{ch}x-\cos a}\right)dx \quad \text{-----[I a-5]}$$

(a は任意の実数)

[ゼータの香りの漂う公式に関連した積分式]

$$\frac{a\pi/2}{\mathrm{ch}(a\pi/2)}=2a\left\{\frac{1}{1^2+a^2}-\frac{3}{3^2+a^2}+\frac{5}{5^2+a^2}-\frac{7}{7^2+a^2}+-\cdot\cdot\right\}=\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{\mathrm{ch}(x/a)}dx \quad \text{---[E1]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$(a\pi/2)\mathrm{th}(a\pi/2)=2a^2\left\{\frac{1}{1^2+a^2}+\frac{1}{3^2+a^2}+\frac{1}{5^2+a^2}+\frac{1}{7^2+a^2}+\cdot\cdot\right\}=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{\mathrm{sh}(x/a)}dx \quad \text{---[E2]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$2a^2\left\{\frac{1}{1^2+a^2}-\frac{1}{3^2+a^2}+\frac{1}{5^2+a^2}-\frac{1}{7^2+a^2}+-\cdot\cdot\right\}=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{\mathrm{ch}(x/a)}dx \quad \text{---[E3]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$1-\frac{a\pi}{\mathrm{sh}(a\pi)}=2a^2\left\{\frac{1}{1^2+a^2}-\frac{1}{2^2+a^2}+\frac{1}{3^2+a^2}-\frac{1}{4^2+a^2}+-\cdot\cdot\right\}=\int_0^{\infty}\sin x\{1-\mathrm{th}(x/(2a))\}dx \quad \text{---[E4]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$\frac{a\pi}{\mathrm{th}(a\pi)}-1=2a^2\left\{\frac{1}{1^2+a^2}+\frac{1}{2^2+a^2}+\frac{1}{3^2+a^2}+\frac{1}{4^2+a^2}+\cdot\cdot\right\}=\int_0^{\infty}\sin x\{1/\mathrm{th}(x/(2a))-1\}dx \quad \text{---[E5]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$2a\left\{\frac{1}{1^2+a^2}-\frac{2}{2^2+a^2}+\frac{3}{3^2+a^2}-\frac{4}{4^2+a^2}+-\cdot\cdot\right\}=\int_0^{\infty}\cos x\{1-\mathrm{th}(x/(2a))\}dx \quad \text{---[E6]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

＜(積分)変換公式 ＞

$$\int_0^{\infty}\left(1-\frac{\mathrm{sh}ax}{\mathrm{ch}ax+\cos x}\right)dx =a\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{\mathrm{ch}ax+\cos x}dx \quad \text{-----[1-a]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$\int_0^{\infty}\left(1-\frac{\mathrm{sh}ax}{\mathrm{ch}ax+\mathrm{ch}x}\right)dx =a\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{\mathrm{ch}ax+\mathrm{ch}x}dx \quad \text{-----[1-b]}$$

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos x\cdot\mathrm{ch}ax}{\mathrm{ch}2ax+\cos 2x}dx =a\int_0^{\infty}\frac{\sin x\cdot\mathrm{sh}ax}{\mathrm{ch}2ax+\cos 2x}dx \quad \text{-----[2-a]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{ch}x\cdot\mathrm{ch}ax}{\mathrm{ch}2ax+\mathrm{ch}2x}dx =a\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{sh}x\cdot\mathrm{sh}ax}{\mathrm{ch}2ax+\mathrm{ch}2x}dx \quad \text{-----[2-b]}$$

(a は|a|が 1 より大きい任意の実数)

$$\int_0^{\infty}\{ax-\log(2(\mathrm{ch}ax-\mathrm{ch}x))\}dx =2\int_0^{\infty}\{-ax+\log(2(\mathrm{ch}ax+\mathrm{ch}x))\}dx \quad \text{---[3-a]}$$

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$\int_0^{\infty}\{ax-\log(2(\mathrm{ch}ax-\cos x))\}dx =2\int_0^{\infty}\{-ax+\log(2(\mathrm{ch}ax+\cos x))\}dx \quad \text{---[3-b]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$\int_0^{\infty}\log\left(\frac{\mathrm{ch}ax-\cos x}{\mathrm{ch}ax-\mathrm{ch}x}\right)dx =2\int_0^{\infty}\log\left(\frac{\mathrm{ch}ax+\mathrm{ch}x}{\mathrm{ch}ax+\cos x}\right)dx \quad \text{-------[3-c]}$$

(a は|a|が 1 より大きい任意の実数)

$$\int_0^{\infty}\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{ch}ax}\right)dx =a\int_0^{\infty}\tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{\mathrm{sh}ax}\right)dx \quad \text{-------[4-a]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$\int_0^{\infty}\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{ch}ax}\right)dx =a\int_0^{\infty}\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{sh}ax}\right)dx \quad \text{-------[4-b]}$$

(a は|a|が 1 より大きい任意の実数)

$$\int_0^\infty \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{chx}}{\mathrm{shax}}\right)dx \ = a\int_0^\infty \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{shx}}{\mathrm{chax}}\right)dx \qquad \text{------[5-a]}$$

(a は|a|が 1 より大きい任意の実数)

$$\int_0^\infty \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cosx}}{\mathrm{shax}}\right)dx \ = a\int_0^\infty \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sinx}}{\mathrm{chax}}\right)dx \qquad \text{------[5-b]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{sinx}}{\mathrm{shax}}dx \ = \mathrm{sh}(\pi/(2a))\int_0^\infty \frac{\mathrm{cosx}}{\mathrm{chax}}dx \qquad \text{-------[6-a]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

これら青色式が得られた。[6-a]を除いた式は、ゼータの香りの漂う公式に関連したものだとわかる。

[6-a]を除く今回の結果の意味は、右辺の積分式が、左辺（と真ん中）に一致すると分かった！ということである。

[ゼータの香りの漂う公式に関連した積分式]での左辺＝真ん中＝右辺と並んだ形の式において、左辺＝真ん中の式は公式集（「数学公式Ⅱ」（岩波書店））の公式から出るものなので、その点は注意いただきたい。

なお、今回の式も、Wolfram Alpha や Excel マクロを使っての数値検証で正しいことを確認している。

さて、以下で[E6]の導出方法(証明)の概略を示す。

$$2a\left\{\frac{1}{1^2+a^2}-\frac{2}{2^2+a^2}+\frac{3}{3^2+a^2}-\frac{4}{4^2+a^2}+-\cdot\cdot\right\}=\int_0^\infty \mathrm{cosx}\{1-\mathrm{th}(x/(2a))\}dx \quad \text{---[E6]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

証明には、次の変数定数倍-積分定理を使う。

****

＜変数定数倍-積分定理＞（この頁で証明。そのときは名前はまだ付けていない）

任意の実関数 F(x)に対し 0～∞の範囲で積分した結果が有限の値となる場合、次の関係が成り立つ。ここで c は、c>0 の実定数である。

$$\int_0^\infty F(cx)dx=(1/c)\int_0^\infty F(x)dx$$

****

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜ [E6]の証明 ＞

「ゼータの香りの・・（その３０７）」で提示したフーリエ級数④を用いる。そこでは x の範囲は周期で限定していたが、その必要はなく x は任意の実数とできる。

$$\frac{\mathrm{cosx}}{e^a}-\frac{\mathrm{cos2x}}{e^{2a}}+\frac{\mathrm{cos3x}}{e^{3a}}-\frac{\mathrm{cos4x}}{e^{4a}}+-\cdot\cdot\ =\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{sha}}{2(\mathrm{cha}+\mathrm{cosx})} \qquad \text{--------④}$$

(x は任意の実数，a は a > 0 の任意の実数)

次式の左辺各項に対し、12 年前のファン・ネス彗星　その１ (biglobe.ne.jp)での［導出］での方法と類似の式変形を上記④を用いて行って、下記④-2 を得る。

$$\left(1-\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{cha+cosx}}\right)-\left(1-\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch2a+cosx}}\right)+\left(1-\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch3a+cosx}}\right)-\left(1-\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch4a+cosx}}\right)+-\cdot\cdot$$

$$=\mathrm{cosx}(1-\mathrm{th}(a/2))-\mathrm{cos2x}(1-\mathrm{th}(a))+\mathrm{cos3x}(1-\mathrm{th}(3a/2))-\mathrm{cos4x}(1-\mathrm{th}(2a))+-\cdot\cdot \quad \text{---④-2}$$

上式の a を ax で置き換えて、次を得る。

$$\left(1-\frac{\mathrm{shax}}{\mathrm{chax+cosx}}\right)-\left(1-\frac{\mathrm{sh2ax}}{\mathrm{ch2ax+cosx}}\right)+\left(1-\frac{\mathrm{sh3ax}}{\mathrm{ch3ax+cosx}}\right)-\left(1-\frac{\mathrm{sh4ax}}{\mathrm{ch4ax+cosx}}\right)+-\cdot\cdot$$

$$=\mathrm{cosx}(1-\mathrm{th}(ax/2))-\mathrm{cos2x}(1-\mathrm{th}(ax))+\mathrm{cos3x}(1-\mathrm{th}(3ax/2))-\mathrm{cos4x}(1-\mathrm{th}(2ax))+-\cdot\cdot \quad \text{---④-3}$$

上式の両辺に対し、0～∞の範囲で x で積分を行い、収束性から項別積分ができる。それに対し、変数定数倍-積分定理を適用し、次の[A4]（これは上方では省いたが）も援用して得た式に対し、最後に a を 1/a で置き換えたりして整理すると、結局、次の④-4 を得る。

$$\log 2=((a^2+1)/(2a))\int_0^{\infty}\left(1-\frac{\mathrm{shax}}{\mathrm{chax+cosx}}\right)dx \quad \text{-----[A4]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$2a\left\{\frac{1}{1^2+a^2}-\frac{2}{2^2+a^2}+\frac{3}{3^2+a^2}-\frac{4}{4^2+a^2}+-\cdot\cdot\right\}=\int_0^{\infty}\mathrm{cosx}\{1-\mathrm{th}(x/(2a))\}dx \quad \text{---④-4}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

これは目標とする[E6]そのものである。よって、証明された。
終わり。
＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このようにして[E6]が得られた。他式も同様にして得られる。だいぶ端折ったがこんな流れで導出される。

証明のポイントは、a を ax で置き換えた点である。[A4]を利用したのも大きい。
a を ax に置き換える操作は、簡単なことであるが（中学生でもできる！）、数学的・哲学的にはすごく深いものを含んでいる。そのことはこれまで述べたことがあるが、空想の中ではすぐにイメージできることが、文章にすれば長大になるという類いの無限にかかわることである。

最後に、想うことや気付いた点など述べておく。

****

● 一連の積分式を見て感じるのは、三角関数と双曲線関数が混在（融合）した世界（地下空間）は重要！ということである。

$$2a^2\left\{\frac{1}{1^2+a^2}-\frac{1}{3^2+a^2}+\frac{1}{5^2+a^2}-\frac{1}{7^2+a^2}+-\cdot\cdot\right\}=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{\mathrm{ch}(x/a)}dx \quad \text{---[E3]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

これはとても美しい。

またここ１年で出てきた一連の恒等式もエッセンシャルな印象がある。私は、次などふしぎしか感じない。

<ゼータの香りの・・(その３２３)>

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}=2\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a+cha}}+\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch4a+cha}}+\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch6a+cha}}+\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch8a+cha}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----<6>}$$

$(a \neq 0)$

$$\mathrm{th}\left(\frac{a}{2}\right)=\left(\frac{\mathrm{sh2a-sha}}{\mathrm{sh2a+sha}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{sh4a-sha}}{\mathrm{sh4a+sha}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{sh6a-sha}}{\mathrm{sh6a+sha}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{sh8a-sha}}{\mathrm{sh8a+sha}}\right)\times\cdot\cdot \quad \text{----<E2>}$$

$(a > 0)$

この地下空間は、数学者はほとんどやってきていないのだけれども、ラマヌジャンはきている。ラマヌジャン全集の式を見て、そう思った。しかし長く滞在していない。

● 14 年前にゼータの香りの漂う公式を研究していた。そして同公式が分裂（分解）するという現象を見つけ、次で報告した。高見沢彗星　その６ (biglobe.ne.jp)

そして 14 年後に、ゼータの香りの漂う公式が、単純な（三角関数と双曲線関数が合わさった）積分式で表されることが分かった！というそういう流れで来ている。

● 三角関数と双曲線関数の融合域（二変数）の研究において、私は初等的な数学しか使っていない。にもかかわらずたくさん面白い式が出てくる。ここは本当は１９世紀に研究されるべきであったのに、みんな気づかず通り過ぎたという図式と思う。みなガウスやアーベル、ヤコビの難しい方にいってしまった。そんなことがありえるのか？たぶんあり得る。人間は足元を見ない。

●[E1]再掲。

$$\frac{a\pi/2}{\mathrm{ch}(a\pi/2)}=2a\left\{\frac{1}{1^2+a^2}-\frac{3}{3^2+a^2}+\frac{5}{5^2+a^2}-\frac{7}{7^2+a^2}+-\cdot\cdot\right\}=\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{\mathrm{ch}(x/a)}dx \quad \text{---[E1]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

この左辺＝真ん中の式では、両辺を a で割って、a を 0 にすると、π/4=1-1/3+1/5-1/7+-・・が出る。面白いことである。こういうのを観ると、上式は深い式という印象がある。それに比べると、ゼータ特殊値など底が浅い。昔からそう思っている。

また、左辺＝真ん中の式だけ見ると「a は任意の実数」で成り立っている。しかし右辺も含めて考えて、（a は 0 より大きい任意の実数）としている。

●[E6]を再掲。

$$2a\left\{\frac{1}{1^2+a^2}-\frac{2}{2^2+a^2}+\frac{3}{3^2+a^2}-\frac{4}{4^2+a^2}+-\cdot\ \cdot\right\}=\int_0^\infty \cos x\{1-\mathrm{th}(x/(2a))\}dx \quad \text{---[E6]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

この式の左辺は、明示的な値として出るはずである、[E4]や[E5]のような感じで。しかし出せていない。公式集を見てもないし、また 14 前の高見沢彗星　その６ (biglobe.ne.jp)でも出していない。ふしぎ・・

これはどういうことだろう？　私の理屈では出るはずなんだけれども・・

ただ、次の[E3]の左辺は、明示的な値としては出ない（はず）。なぜならそれは L(2)に関係しているから！

$$2a^2\left\{\frac{1}{1^2+a^2}-\frac{1}{3^2+a^2}+\frac{1}{5^2+a^2}-\frac{1}{7^2+a^2}+-\cdot\ \cdot\right\}=\int_0^\infty \frac{\sin x}{\mathrm{ch}(x/a)}dx \quad \text{---[E3]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

●　変換公式[6-a]を眺めたい。

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{\mathrm{sh}\,ax}dx = \mathrm{sh}(\pi/(2a))\int_0^\infty \frac{\cos x}{\mathrm{ch}\,ax}dx \quad \text{-------[6-a]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

なんともきれいである。

****

2024. 7. 20 杉岡幹生

＜参考文献＞

・「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）