＜ 双曲線ゼータとその派生式 その４９＞

さらに、片辺にラマヌジャンの香りが漂う式をもつ恒等式を六つ追加したので、下方に[Ａ３]～[Ａ８]で示す。前回分の下に青色で示した。最後に参考としてラマヌジャンの式も並べた。なお、現時点で前回分[１]と[２]に対応する式はまだ見出せていないので、[Ａ１]と[Ａ２]は抜いている。

なお、双曲線関数 sinh, cosh はそれぞれ sh, ch と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。また a は任意の実数であり、よって例えば、(a > 0)は「a は 0 より大きい任意の実数」を意味する。e は自然対数の底である。$\tan^{-1}$ は arctan である。

＝＝

＜恒等式＞

$$\frac{1}{e^{2a}-1}+\frac{2}{e^{4a}-1}+\frac{3}{e^{6a}-1}+\frac{4}{e^{8a}-1}+\cdot\cdot=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{sh}^2 a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 4a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----[1]}$$

(a > 0)

$$\frac{1}{e^{2a}-1}-\frac{2}{e^{4a}-1}+\frac{3}{e^{6a}-1}-\frac{4}{e^{8a}-1}+-\cdot\cdot=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{ch}^2 a}+\frac{1}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{1}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{1}{\mathrm{ch}^2 4a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----[2]}$$

(a > 0)

$$\frac{1}{e^{2a}+1}-\frac{2}{e^{4a}+1}+\frac{3}{e^{6a}+1}-\frac{4}{e^{8a}+1}+-\cdot\cdot=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{ch}^2 a}-\frac{1}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{1}{\mathrm{ch}^2 3a}-\frac{1}{\mathrm{ch}^2 4a}+-\cdot\cdot\right) \quad \text{---[3]}$$

(a > 0)

$$\frac{1}{e^{2a}+1}+\frac{2}{e^{4a}+1}+\frac{3}{e^{6a}+1}+\frac{4}{e^{8a}+1}+\cdot\cdot=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{sh}^2 a}-\frac{1}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 3a}-\frac{1}{\mathrm{sh}^2 4a}+-\cdot\cdot\right) \quad \text{---[4]}$$

(a > 0)

$$\frac{1}{e^{a}-1}+\frac{3}{e^{3a}-1}+\frac{5}{e^{5a}-1}+\frac{7}{e^{7a}-1}+\cdot\cdot=\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a-1}+\frac{\mathrm{ch}2a}{\mathrm{ch}4a-1}+\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{ch}6a-1}+\frac{\mathrm{ch}4a}{\mathrm{ch}8a-1}+\cdot\cdot \quad \text{----[5]}$$

(a > 0)

$$\frac{1}{e^{a}+1}+\frac{3}{e^{3a}+1}+\frac{5}{e^{5a}+1}+\frac{7}{e^{7a}+1}+\cdot\cdot=\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a-1}-\frac{\mathrm{ch}2a}{\mathrm{ch}4a-1}+\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{ch}6a-1}-\frac{\mathrm{ch}4a}{\mathrm{ch}8a-1}+-\cdot\cdot \quad \text{---[6]}$$

(a > 0)

$$\frac{1}{e^{a}-1}-\frac{3}{e^{3a}-1}+\frac{5}{e^{5a}-1}-\frac{7}{e^{7a}-1}+-\cdot\ \cdot=\frac{sha}{ch2a+1}+\frac{sh2a}{ch4a+1}+\frac{sh3a}{ch6a+1}+\frac{sh4a}{ch8a+1}+\ \cdot\ \cdot\text{-----[7]}$$
$$(a>0)$$

$$\frac{1}{e^{a}+1}-\frac{3}{e^{3a}+1}+\frac{5}{e^{5a}+1}-\frac{7}{e^{7a}+1}+-\cdot\ \cdot=\frac{sha}{ch2a+1}-\frac{sh2a}{ch4a+1}+\frac{sh3a}{ch6a+1}-\frac{sh4a}{ch8a+1}+-\ \cdot\ \cdot\text{----[8]}$$
$$(a>0)$$

$$\frac{1}{e^{2a}+1}-\frac{1}{2(e^{4a}+1)}+\frac{1}{3(e^{6a}+1)}-\frac{1}{4(e^{8a}+1)}+-\cdot\ \cdot=-\frac{a}{4}+\left(\frac{1}{2}\right)\log\left(2ch\left(\frac{a}{2}\right)\right)$$
$$+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\log\left(\frac{ch2a+1}{ch2a+cha}\right)-\log\left(\frac{ch4a+1}{ch4a+cha}\right)+\log\left(\frac{ch6a+1}{ch6a+cha}\right)-\log\left(\frac{ch8a+1}{ch8a+cha}\right)+-\cdot\ \cdot\right)\ \text{---[A3]}$$
$$(a\geqq 0)$$

$$\frac{1}{e^{2a}+1}+\frac{1}{2(e^{4a}+1)}+\frac{1}{3(e^{6a}+1)}+\frac{1}{4(e^{8a}+1)}+\ \cdot\ \cdot=\frac{a}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)\log\left(2sh\left(\frac{a}{2}\right)\right)$$
$$+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\log\left(\frac{ch2a-cha}{ch2a-1}\right)-\log\left(\frac{ch4a-cha}{ch4a-1}\right)+\log\left(\frac{ch6a-cha}{ch6a-1}\right)-\log\left(\frac{ch8a-cha}{ch8a-1}\right)+-\cdot\ \cdot\right)\ \text{--[A4]}$$
$$(a>0)$$

$$\frac{1}{e^{2a}-1}+\frac{1}{3(e^{6a}-1)}+\frac{1}{5(e^{10a}-1)}+\frac{1}{7(e^{14a}-1)}+\ \cdot\ \cdot$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\log\left(\frac{cha}{sha}\right)+\log\left(\frac{ch2a}{sh2a}\right)+\log\left(\frac{ch3a}{sh3a}\right)+\log\left(\frac{ch4a}{sh4a}\right)+\ \cdot\ \cdot\right)\ \text{---[A5]}$$
$$(a>0)$$

$$\frac{1}{e^{2a}+1}+\frac{1}{3(e^{6a}+1)}+\frac{1}{5(e^{10a}+1)}+\frac{1}{7(e^{14a}+1)}+\ \cdot\ \cdot$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\log\left(\frac{cha}{sha}\right)-\log\left(\frac{ch2a}{sh2a}\right)+\log\left(\frac{ch3a}{sh3a}\right)-\log\left(\frac{ch4a}{sh4a}\right)+-\cdot\ \cdot\right)\ \text{---[A6]}$$
$$(a>0)$$

$$\frac{1}{e^{a}-1}-\frac{1}{3(e^{3a}-1)}+\frac{1}{5(e^{5a}-1)}-\frac{1}{7(e^{7a}-1)}+-\cdot\ \cdot$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{sha}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{sh2a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{sh3a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{sh4a}\right)+\ \cdot\ \cdot\right)\ \text{---[A7]}$$
$$(a>0)$$

$$\frac{1}{e^{a}+1}-\frac{1}{3(e^{3a}+1)}+\frac{1}{5(e^{5a}+1)}-\frac{1}{7(e^{7a}+1)}+-\cdot\cdot$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sha}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh2a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh3a}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh4a}}\right)+-\cdot\cdot\right)\quad \text{---[A8]}$$

$(a>0)$

＜ラマヌジャンの式＞

$$\frac{1}{e^{2\pi}-1}+\frac{2}{e^{4\pi}-1}+\frac{3}{e^{6\pi}-1}+\frac{4}{e^{8\pi}-1}+\cdot\cdot=\frac{1}{24}-\frac{1}{8\pi}\qquad \text{------[A]}$$

$$\frac{1^3}{e^{2\pi}-1}+\frac{2^3}{e^{4\pi}-1}+\frac{3^3}{e^{6\pi}-1}+\frac{4^3}{e^{8\pi}-1}+\cdot\cdot=\frac{1}{80}\left(\frac{\varpi}{\pi}\right)^4-\frac{1}{240}\qquad \text{-----[B]}$$

ϖ：レムニスケート周率

$$\frac{1^5}{e^{2\pi}-1}+\frac{2^5}{e^{4\pi}-1}+\frac{3^5}{e^{6\pi}-1}+\frac{4^5}{e^{8\pi}-1}+\cdot\cdot=\frac{1}{504}\qquad \text{------[C]}$$

$$\frac{1}{1(e^{2\pi}-1)}+\frac{1}{2(e^{4\pi}-1)}+\frac{1}{3(e^{6\pi}-1)}+\frac{1}{4(e^{8\pi}-1)}+\cdot\cdot=-\frac{\pi}{12}-\left(\frac{1}{2}\right)\log\left(\frac{\varpi}{\pi\sqrt{2}}\right)\qquad \text{----[D]}$$

ϖ：レムニスケート周率

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

　この[Ａ３]～［Ａ８］の六式が得られた。任意の実数 a（条件付き）で成り立つのでこれらは恒等式である。[Ａ３]の a は(a≧0)であり、0 も含めて成り立っているのが面白い。これらの式は Excel での数値検証でも成り立つことを確認している。

　今回の式も、左辺はラマヌジャンの香りが漂っている。右辺はゼータの香りが漂っているように見える。今回のラマヌジャンの香りは上記の[Ｄ]のものとなっている。

　最後に、気付いた点や想うことなど述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●今回の六式も、ここ半年で順次導いてきたものである。
冒頭でも述べたが、下記[１]と[２]に対応する[Ａ１]と[Ａ２]はまだ得られていない。

$$\frac{1}{e^{2a}-1}+\frac{2}{e^{4a}-1}+\frac{3}{e^{6a}-1}+\frac{4}{e^{8a}-1}+\cdot\cdot=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{sh}^2a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 4a}+\cdot\cdot\right)\qquad \text{-----[1]}$$

$(a>0)$

$$\frac{1}{e^{2a}-1}-\frac{2}{e^{4a}-1}+\frac{3}{e^{6a}-1}-\frac{4}{e^{8a}-1}+-\cdot\ \cdot=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{ch^2 a}+\frac{1}{ch^2 2a}+\frac{1}{ch^2 3a}+\frac{1}{ch^2 4a}+\cdot\ \cdot\right) \text{----}[2]$$

$(a>0)$

$$\frac{1}{e^{2a}-1}+\frac{1}{2(e^{4a}-1)}+\frac{1}{3(e^{6a}-1)}+\frac{1}{4(e^{8a}-1)}+\cdot\ \cdot=?$$

$$\frac{1}{e^{2a}-1}-\frac{1}{2(e^{4a}-1)}+\frac{1}{3(e^{6a}-1)}-\frac{1}{4(e^{8a}-1)}+-\cdot\ \cdot=?$$

　この青色式の右辺がまだ得られていない。これが案外難しい。こんな式は真っ先に出るべきと思うが、まだ出せていない。

　今回の式たちは、前回分[１]～[８]が棲む地上世界よりもう一段階低い地下世界に棲んでおり、ちょっと深いものである。

●この領域（双曲線関数と三角関数の融合域、且つ二変数）では、母等式が六つ、補助母等式が二つあって、しかもそれぞれで sin グループ、cos グループの二種類があり、さらに全てで微分式、積分式が存在する。したがって基本式が非常に多い。

　だから、この領域ではいろいろな結果が出るのであるが、結果が出る前段階の準備がたいへんである。基本式が多いので複雑な状況となり・・

　　そこで、準備や整理整頓が重要となる。その準備は、同じことを繰り返し書き写すというううんざりするような冗長な作業である。それらは頭を使うというよりただ書き写すだけである。しかし、しんどいのだけれども、創造には、そんな冗長なる繰り返しを含む準備が必要なのだと思う。

　大きな構造をさぐっていくには、畑の整備にあたる作業がまず大事であり、その面倒な作業が終われば、あとは収穫を待つだけとなる。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2024.4.28 杉岡幹生

＜参考文献＞

・「数学の夢　素数からのひろがり」（黒川信重著、岩波書店）

・「数論Ⅱ」（黒川、栗原、斎藤著、岩波書店）

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」（Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社）