＜ 双曲線ゼータとその派生式 その４８＞

　片辺にラマヌジャンの香りが漂う式をもつ恒等式を見出したので下方に示す。参考にラマヌジャンの式も並べた。

　これらは、ここ３年ほどの間に散発的に発見した式も一部含まれるが、その時はたまたま見つけたという印象があった。最近になって一連の母等式が出そろい、系統的に出せるようになったので、今回示したものである。とはいえ、まだ途上ではあるが・・

　なお、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。また a は任意の実数であり、よって例えば、$(a>0)$は「a は 0 より大きい任意の実数」を意味する。e は自然対数の底である。

==

＜恒等式＞

$$\frac{1}{e^{2a}-1}+\frac{2}{e^{4a}-1}+\frac{3}{e^{6a}-1}+\frac{4}{e^{8a}-1}+\cdot\cdot=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{sh^2a}+\frac{1}{sh^22a}+\frac{1}{sh^23a}+\frac{1}{sh^24a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----[1]}$$

$(a>0)$

$$\frac{1}{e^{2a}-1}-\frac{2}{e^{4a}-1}+\frac{3}{e^{6a}-1}-\frac{4}{e^{8a}-1}+-\cdot\cdot=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{ch^2a}+\frac{1}{ch^22a}+\frac{1}{ch^23a}+\frac{1}{ch^24a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----[2]}$$

$(a>0)$

$$\frac{1}{e^{2a}+1}-\frac{2}{e^{4a}+1}+\frac{3}{e^{6a}+1}-\frac{4}{e^{8a}+1}+-\cdot\cdot=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{ch^2a}-\frac{1}{ch^22a}+\frac{1}{ch^23a}-\frac{1}{ch^24a}+-\cdot\cdot\right) \quad \text{---[3]}$$

$(a>0)$

$$\frac{1}{e^{2a}+1}+\frac{2}{e^{4a}+1}+\frac{3}{e^{6a}+1}+\frac{4}{e^{8a}+1}+\cdot\cdot=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{sh^2a}-\frac{1}{sh^22a}+\frac{1}{sh^23a}-\frac{1}{sh^24a}+-\cdot\cdot\right) \quad \text{---[4]}$$

$(a>0)$

$$\frac{1}{e^{a}-1}+\frac{3}{e^{3a}-1}+\frac{5}{e^{5a}-1}+\frac{7}{e^{7a}-1}+\cdot\cdot=\frac{cha}{ch2a-1}+\frac{ch2a}{ch4a-1}+\frac{ch3a}{ch6a-1}+\frac{ch4a}{ch8a-1}+\cdot\cdot \quad \text{----[5]}$$

$(a>0)$

$$\frac{1}{e^{a}+1}+\frac{3}{e^{3a}+1}+\frac{5}{e^{5a}+1}+\frac{7}{e^{7a}+1}+\cdot\cdot=\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a-1}-\frac{\mathrm{ch}2a}{\mathrm{ch}4a-1}+\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{ch}6a-1}-\frac{\mathrm{ch}4a}{\mathrm{ch}8a-1}+-\cdot\cdot \text{---[6]}$$

$(a > 0)$

$$\frac{1}{e^{a}-1}-\frac{3}{e^{3a}-1}+\frac{5}{e^{5a}-1}-\frac{7}{e^{7a}-1}+-\cdot\cdot=\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}2a+1}+\frac{\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}4a+1}+\frac{\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}6a+1}+\frac{\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}8a+1}+\cdot\cdot \text{----[7]}$$

$(a > 0)$

$$\frac{1}{e^{a}+1}-\frac{3}{e^{3a}+1}+\frac{5}{e^{5a}+1}-\frac{7}{e^{7a}+1}+-\cdot\cdot=\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}2a+1}-\frac{\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}4a+1}+\frac{\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}6a+1}-\frac{\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}8a+1}+-\cdot\cdot \text{---[8]}$$

$(a > 0)$

＜ラマヌジャンの式＞

$$\frac{1}{e^{2\pi}-1}+\frac{2}{e^{4\pi}-1}+\frac{3}{e^{6\pi}-1}+\frac{4}{e^{8\pi}-1}+\cdot\cdot=\frac{1}{24}-\frac{1}{8\pi} \qquad \text{-----[A]}$$

$$\frac{1^3}{e^{2\pi}-1}+\frac{2^3}{e^{4\pi}-1}+\frac{3^3}{e^{6\pi}-1}+\frac{4^3}{e^{8\pi}-1}+\cdot\cdot=\frac{1}{80}\left(\frac{\varpi}{\pi}\right)^4-\frac{1}{240} \qquad \text{----[B]}$$

ϖ：レムニスケート周率

$$\frac{1^5}{e^{2\pi}-1}+\frac{2^5}{e^{4\pi}-1}+\frac{3^5}{e^{6\pi}-1}+\frac{4^5}{e^{8\pi}-1}+\cdot\cdot=\frac{1}{504} \qquad \text{-----[C]}$$

$$\frac{1}{1(e^{2\pi}-1)}+\frac{1}{2(e^{4\pi}-1)}+\frac{1}{3(e^{6\pi}-1)}+\frac{1}{4(e^{8\pi}-1)}+\cdot\cdot=-\frac{\pi}{12}-\left(\frac{1}{2}\right)\log\left(\frac{\varpi}{\pi\sqrt{2}}\right) \quad \text{---[D]}$$

ϖ：レムニスケート周率

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

この［１］～［８］が得られた。

上の＜ラマヌジャンの式＞を見てもらえば、冒頭で「ラマヌジャンの香りが漂う式」と言った意味がわかってもらえると思う。今回示した恒等式は、上記［Ａ］の香りが漂っているといえるであろう。

［１］を見よう。

$$\frac{1}{e^{2a}-1}+\frac{2}{e^{4a}-1}+\frac{3}{e^{6a}-1}+\frac{4}{e^{8a}-1}+\cdot\cdot=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{sh}^2 a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 4a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----[1]}$$

$(a > 0)$

この式の左辺はラマヌジャンの香りが漂っているが、右辺はリーマンゼータζ(s)のζ(2)の香りが漂っている！

［１]の証明を簡潔に示すと、以下となる。

****

＜証明＞

ゼータの香りの漂う・・（その３０７）でのフーリエ級数①を使って、１２年前のこちらの 2012/8/16 の[導出]と同じ方法を使うと、次の式（母等式）①を得る。

$$\frac{\sin x}{e^{a}-1}+\frac{\sin 2x}{e^{2a}-1}+\frac{\sin 3x}{e^{3a}-1}+\frac{\sin 4x}{e^{4a}-1}+\cdot\cdot=\left(\frac{\sin x}{2}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{ch}2a-\cos x}+\frac{1}{\mathrm{ch}4a-\cos x}+\frac{1}{\mathrm{ch}6a-\cos x}+\frac{1}{\mathrm{ch}8a-\cos x}+\cdot\cdot\right) \text{--①}$$

$$(a>0)$$

上式の両辺を sinx で割って x->0 として（x を限りなく 0 に近づけて）ロピタルの定理を使い、右辺を少し変形すると次を得る。

$$\frac{1}{e^{2a}-1}+\frac{2}{e^{4a}-1}+\frac{3}{e^{6a}-1}+\frac{4}{e^{8a}-1}+\cdot\cdot=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{sh}^2 a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 4a}+\cdot\cdot\right)$$

$$(a>0)$$

これは[１]そのものである。よって証明できた。

終わり。

****

［１]はこのようにして得られた。他の式も類似の方法で得られる。

最後に、気付いた点や想うことなど述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●［１]～[４]はこの四つでワンセットになっている印象がある。また[５]～[８]も四つでワンセットになっている。前者を再掲しよう。

$$\frac{1}{e^{2a}-1}+\frac{2}{e^{4a}-1}+\frac{3}{e^{6a}-1}+\frac{4}{e^{8a}-1}+\cdot\cdot=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{sh}^2 a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 4a}+\cdot\cdot\right) \text{ -----[1]}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{e^{2a}-1}-\frac{2}{e^{4a}-1}+\frac{3}{e^{6a}-1}-\frac{4}{e^{8a}-1}+-\cdot\cdot=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{ch}^2 a}+\frac{1}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{1}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{1}{\mathrm{ch}^2 4a}+\cdot\cdot\right) \text{-----[2]}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{e^{2a}+1}-\frac{2}{e^{4a}+1}+\frac{3}{e^{6a}+1}-\frac{4}{e^{8a}+1}+-\cdot\cdot=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{ch^2a}-\frac{1}{ch^2 2a}+\frac{1}{ch^2 3a}-\frac{1}{ch^2 4a}+-\cdot\cdot\right) \quad \text{---[3]}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{e^{2a}+1}+\frac{2}{e^{4a}+1}+\frac{3}{e^{6a}+1}+\frac{4}{e^{8a}+1}+\cdot\cdot=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{sh^2a}-\frac{1}{sh^2 2a}+\frac{1}{sh^2 3a}-\frac{1}{sh^2 4a}+-\cdot\cdot\right) \quad \text{---[4]}$$

$$(a>0)$$

これらはなんともいえない味わいがある。このセットで完成する優美な襖絵を観ているかのようである。

● 再び[１]を見たい。上方の＜証明＞からすぐわかるように、[１]は次の[１]-2 と同値である。

$$\frac{1}{e^{2a}-1}+\frac{2}{e^{4a}-1}+\frac{3}{e^{6a}-1}+\frac{4}{e^{8a}-1}+\cdot\cdot=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{sh^2a}+\frac{1}{sh^2 2a}+\frac{1}{sh^2 3a}+\frac{1}{sh^2 4a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----[1]}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{e^{a}-1}+\frac{2}{e^{2a}-1}+\frac{3}{e^{3a}-1}+\frac{4}{e^{4a}-1}+\cdot\cdot=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{cha-1}+\frac{1}{ch2a-1}+\frac{1}{ch3a-1}+\frac{1}{ch4a-1}+\cdot\cdot\right) \text{--[1]-2}$$

$$(a>0)$$

どちらの形も趣があってよいものだが、冒頭では[1]の方を採用した。

次に[５]を見たい。[５]は、じつは次の[５]-2 と同値である。

$$\frac{1}{e^{a}-1}+\frac{3}{e^{3a}-1}+\frac{5}{e^{5a}-1}+\frac{7}{e^{7a}-1}+\cdot\cdot=\frac{cha}{ch2a-1}+\frac{ch2a}{ch4a-1}+\frac{ch3a}{ch6a-1}+\frac{ch4a}{ch8a-1}+\cdot\cdot \text{-----[5]}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{e^{a}-1}+\frac{3}{e^{3a}-1}+\frac{5}{e^{5a}-1}+\frac{7}{e^{7a}-1}+\cdot\cdot=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{cha}{sh^2a}+\frac{ch2a}{sh^2 2a}+\frac{ch3a}{sh^2 3a}+\frac{ch4a}{sh^2 4a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----[5]-2}$$

$$(a>0)$$

冒頭では[５]の方を採用したが、[５]-2 も素晴らしい！

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2024.4.22 杉岡幹生

＜参考文献＞

・「数学の夢　素数からのひろがり」（黒川信重著、岩波書店）

・「数論Ⅱ」（黒川、栗原、斎藤著、岩波書店）