不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{(2+3x)\sqrt{2-x^2}}dx$ の計算

平成 25 年 5 月 6 日

$$I = \int \frac{1}{(2+3x)\sqrt{2-x^2}}dx \tag{1}$$

を計算する。

1　解き方（その 1)

$x = 2\sin\theta$ とする。$dx = 2\cos\theta d\theta$ であるから、

$$I = \int \frac{1}{2+6\sin\theta}d\theta$$

$t = \tan(\theta/2)$ と置くと、$dt = 2/(1+t^2)$、$\sin\theta = (2t)/(1+t^2)$ であるから、

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{2+6\sin\theta}d\theta \\
&= \int \frac{1}{t^2+6t+1}dt \\
&= \int \frac{1}{(t+3)^2-8}dt \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}\log\left|\frac{t+3-2\sqrt{2}}{t+3+2\sqrt{2}}\right|
\end{aligned}$$

$t = \tan(\theta/2)$ であるから

$$I = \frac{1}{4\sqrt{2}}\log\left|\frac{\tan(\theta/2)+3-2\sqrt{2}}{\tan(\theta/2)+3+2\sqrt{2}}\right|$$

$\theta = \arcsin(x/2)$ であるから

$$I = \frac{1}{4\sqrt{2}}\log\left|\frac{\tan(\arcsin(x/2)/2)+3-2\sqrt{2}}{\tan(\arcsin(x/2)/2)+3+2\sqrt{2}}\right| \tag{2}$$

別の表記法をする.。

$$I = \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \left| \frac{\tan\left(\dfrac{\arcsin(x/2)}{2}\right) + 3 - 2\sqrt{2}}{\tan\left(\dfrac{\arcsin(x/2)}{2}\right) + 3 + 2\sqrt{2}} \right| \tag{3}$$

2　解き方（その２）

$$I = \int \frac{1}{(2+3x)(2-x)} \sqrt{\frac{2-x}{2+x}} dx$$

$t = \sqrt{(2-x)/(2+x)}$ とおくと、
$x = -2(t^2-1)/(t^2+1)$、$dx = -8t/(t^2+1)^2$、$2-x = 4t^2/(t^2+1)$、
$2+3x = -4(t^2-2)/(t^2+1)$。

結局、被積分関数は、$1/(t^2 - 2)$ となるので、

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \left| \frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}} \right| \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \left| \frac{\sqrt{2-x}/\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}{\sqrt{2-x}/\sqrt{2+x} + \sqrt{2}} \right| \end{aligned}$$

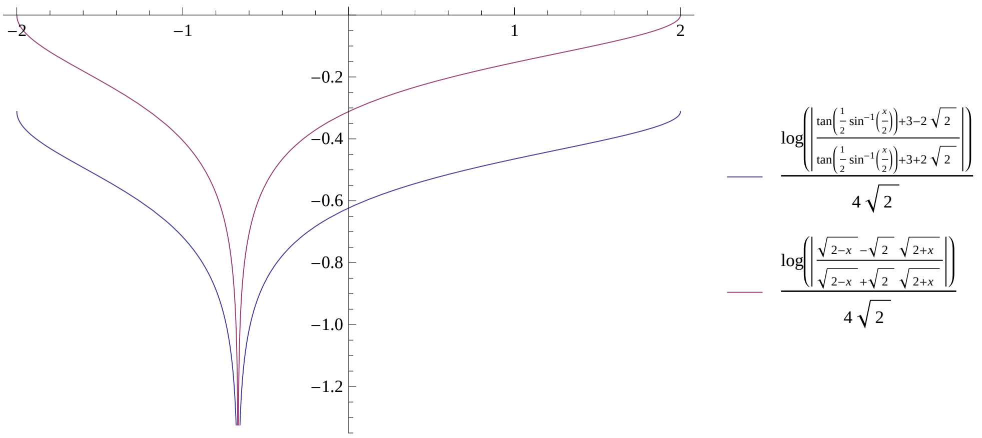
これを整理する（分母 $\sqrt{2+x}$ をはらう）

$$I = \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \left| \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{2}\sqrt{2+x}}{\sqrt{2-x} + \sqrt{2}\sqrt{2+x}} \right| \tag{4}$$

3　付記

積分結果の検証 (微分したものが、被積分関数になる）ことは、数式処理システムで、確認した。

原始関数をプロットしたものを示す。



(4) の $x=0$ での値が、0 なのに対し、(3) の $x=0$ での値は $\frac{\log\left(3-2\sqrt{2}\right)}{4\sqrt{2}}$ となる。（原始関数だから、定数分の差は許される。

なお、（その１）の原始関数は、三角関数 (tan、arcsin) を含んでいるが、（その２）は、三角関数はあらわれない。

$$
\begin{aligned}
\tan(x) &= \frac{i\left(e^{-ix}-e^{ix}\right)}{e^{-ix}+e^{ix}} \\
\arcsin(x) &= -i\log\left(\sqrt{1-x^2}+ix\right)
\end{aligned}
$$

であるから、気長に計算すれば、（その１）を変形して（その２）に帰着することは出来るのだろう。