

不定積分 $\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$ の計算
解析学大要 改訂版 第三章 問(4)

平成 25 年 4 月 17 日

$$I = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$$

を計算する。

$$\begin{aligned}\sin x &= -\cos(x + \pi/2) = -\cos((x + \pi/4) + \pi/4) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos(x + \pi/4) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(x + \pi/4) \\ \sin x + \cos x &= \sqrt{2} \sin(x + \pi/4)\end{aligned}$$

であることに着目すると

$$I = \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{\cos(x + \pi/4)}{\sin(x + \pi/4)} \right) dx$$

$t = \sin(x + \pi/4)$ として二番目の積分を計算し、変数を置き戻して

$$= \frac{1}{2} \left(x - \log \left| \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right| \right) dx$$

いきなり、

$$\begin{aligned}\cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin x &= \frac{2t}{1+t^2} \\ dx &= \frac{2}{1+t^2} dt \\ t &= \tan \frac{x}{2}\end{aligned}$$

とやってもよいが、多少めんどうとなる。