不定積分 $\int \frac{1}{x^4+1}dx$ の計算

平成 25 年 4 月 16 日

$$I = \int \frac{1}{x^4+1}dx \tag{1}$$

を計算する。

被積分関数を $f(x) = \dfrac{1}{x^4+1}$ とする。

1 未定係数法による、被積分関数の分解

$$x^4+1 = (x^2+1)^2 - 2x^2 = (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$$

である。

未定係数法により

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^4+1} &= \frac{1}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)} && (2) \\ &= \frac{A_1x+B_1}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{A_2x+B_2}{x^2-\sqrt{2}x+1} && (3) \end{aligned}$$

なる $A_i, B_i (i=1,2)$ を求める。

(**??**) を通分したものの分母が 1 にならなければならない。つまり

$$(A_1x+B_1)(x^2-\sqrt{2}x+1) = A_1x^3 + (B_1-\sqrt{2}A_1)x^2 + (A_1-\sqrt{2}B_1)x + B_1$$
$$(A_2x+B_2)(x^2+\sqrt{2}x+1) = A_2x^3 + (B_2+\sqrt{2}A_2)x^2 + (A_2+\sqrt{2}B_2)x + B_2$$

の和が 1 に等しいくならなければならないから、

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= \; = 0 \\ (B_1-\sqrt{2}A_1) + (B_2+\sqrt{2}A_2) &= \; = 0 \\ (A_1-\sqrt{2}B_1) + (A_2+\sqrt{2}B_2) &= 0 \\ B1 + B2 &= 1 \end{aligned}$$

この連立方程式を A_j,B_j について解くと

$$B_1 = B_2 = \frac{1}{2}, A_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}, A_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

をえる。

2 式の変形

以上のことから、

$$\begin{aligned} f(x) &\equiv f_1(x) - f_2(x) \\ f_1(x) &\equiv \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} \\ f_2(x) &\equiv \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} \end{aligned}$$

3 積分

3.1 $f_1(x)$ の積分

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{(x+1/\sqrt{2})+1/\sqrt{2}}{((x+1/\sqrt{2})^2+1/2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{(x+1/\sqrt{2})}{(x+1/\sqrt{2})^2+1/2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1/\sqrt{2}}{((x+1/\sqrt{2})^2+1/2} \end{aligned}$$

$t = x + 1/\sqrt{2}$ とおいて、置換積分をし、変数をおきもどすと、

$$I_1 = \frac{1}{4\sqrt{2}}\log((x+1/\sqrt{2})^2+1/2) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}}\right)$$
$$\frac{1}{4\sqrt{2}}\log(x+\sqrt{2}x+1) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}+1\right)$$

3.2 $f_2(x)$ の積分

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{(x-1/\sqrt{2})-1/\sqrt{2}}{((x-1/\sqrt{2})^2+1/2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{(x-1/\sqrt{2})}{(x+1/\sqrt{2})^2+1/2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1/\sqrt{2}}{((x-1/\sqrt{2})^2+1/2} \end{aligned}$$

$t = x - 1/\sqrt{2}$ とおいて、置換積分をし、変数をおきもどすと、

$$I_1 = \frac{1}{4\sqrt{2}}\log((x-1/\sqrt{2})^2+1/2) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x-1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}}\right)$$
$$\frac{1}{4\sqrt{2}}\log(x-\sqrt{2}x+1) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}x-1\right)$$

3.3 結論

$$\int \frac{1}{x^4+1}dx = I_1 - I_2$$

であるから、

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{x+\sqrt{2}x+1}{x-\sqrt{2}x+1} \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{2}}(\arctan\left(\sqrt{2}x+1\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}x-1\right) \end{aligned}$$

3.4 注意

数表（岩波全書）などには、

$$I = \frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{x+\sqrt{2}x+1}{x-\sqrt{2}x+1} + 2\arctan\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}$$

と記するものがおおい。どちらも正しいことは検算しておいた。

ここで使う積分（の公式）は

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2+a^2}dx &= \frac{1}{|a|}\arctan\frac{|x|}{\sqrt{|a|}} \\ \int \frac{1}{x}dx &= \log|x| \end{aligned}$$

のみである。