＜ 双曲線ゼータとその派生式 その４７＞ rev1.01

＜Ａ＞は＜Ｅ２＞と、＜Ｃ＞は＜Ｅ１＞と同値式とわかったので、それらは欠番とした（青色の行）。

なお、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。また a は任意の実数であり、よって例えば、$(a \neq 0)$は「a は 0 でない任意の実数」を意味する。log は自然対数、e は自然対数の底である。$\tan^{-1}$, th^{-1} はそれぞれ arctan、arctanh。

==

＜恒等式（or 等式）＞

$$\frac{1}{\mathrm{cha}-1}-\frac{1}{\mathrm{sha}}=2\left(\frac{1}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----<1>}$$

$(a>0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}-\frac{1}{\mathrm{cha}+1}=2\left(\frac{1}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----<2>}$$

$(a>0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2(a/2)}=4\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch2a}}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch4a}}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----<3>}$$

$(a\neq 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^2(a/2)}=4\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{ch2a}}{\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{ch4a}}{\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha}}+-\cdot\cdot\right) \quad \text{----<4>}$$

$(a\neq 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}=2\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+-\cdot\cdot\right) \quad \text{-----<5>}$$

$(a\neq 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}=2\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----<6>}$$

$(a\neq 0)$

$$\frac{\mathrm{ch}\left(\frac{a}{2}\right)}{2\mathrm{sh}\left(\frac{a}{2}\right)}-\frac{1}{2}$$

$$=\left(\frac{\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}a}-1\right)-\left(\frac{\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}a}-1\right)+\left(\frac{\mathrm{sh}6a}{\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}a}-1\right)-\left(\frac{\mathrm{sh}8a}{\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}a}-1\right)+-\cdot\cdot$$ --＜7-1＞

$(a>0)$

$$\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{a}{2}\right)}{2\mathrm{ch}\left(\frac{a}{2}\right)}$$

$$=\left(1-\frac{\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a}\right)-\left(1-\frac{\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}4a+\mathrm{ch}a}\right)+\left(1-\frac{\mathrm{sh}6a}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a}\right)-\left(1-\frac{\mathrm{sh}8a}{\mathrm{ch}8a+\mathrm{ch}a}\right)+-\cdot\cdot$$ --＜7-2＞

$(a>0)$

＜A＞は＜E2＞と同値であったので欠番とした

$$\left(\frac{1}{2}\right)\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}a}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}2a}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}4a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}6a}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}8a}\right)+-\cdot\cdot$$ --＜B＞

$(a\neq 0)$

＜C＞は＜E1＞と同値であったので欠番とした

$$\left(\frac{1}{2}\right)\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}a}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}2a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}4a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}6a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}8a}\right)+\cdot\cdot$$ ---＜D＞

$(a\neq 0)$

$$\mathrm{th}\left(\frac{a}{2}\right)=\left(\frac{\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a}\right)\times\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}a}\right)\times\left(\frac{\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a}\right)\times\left(\frac{\mathrm{ch}8a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}a}\right)\times\cdot\cdot$$ ----＜E1＞

$(a>0)$

$$\mathrm{th}\left(\frac{a}{2}\right)=\left(\frac{\mathrm{sh}2a-\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}2a+\mathrm{sh}a}\right)\times\left(\frac{\mathrm{sh}4a-\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}4a+\mathrm{sh}a}\right)\times\left(\frac{\mathrm{sh}6a-\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}6a+\mathrm{sh}a}\right)\times\left(\frac{\mathrm{sh}8a-\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}8a+\mathrm{sh}a}\right)\times\cdot\cdot$$ ----＜E2＞

$(a>0)$

$$\frac{1}{(e^{a}-1)}+\frac{1}{2(e^{2a}-1)}+\frac{1}{3(e^{3a}-1)}+\frac{1}{4(e^{4a}-1)}+\cdot\cdot$$

$$=\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})}\times\frac{1}{(1-e^{-2a})}\times\frac{1}{(1-e^{-3a})}\times\frac{1}{(1-e^{-4a})}\times\cdot\cdot\right)$$ ----＜F1＞

$(a > 0)$

$$\varpi = \pi \cdot e^{-\pi/6} \cdot \sqrt{2} \cdot \left((1 - e^{-2\pi}) \times (1 - e^{-4\pi}) \times (1 - e^{-6\pi}) \times (1 - e^{-8\pi}) \times \cdot\cdot\right)^2 \text{ ---<F2>}$$

ϖ：レムニスケート周率

$$\frac{1}{sh^2(a/2)} = 4sha\left(\frac{sh2a}{(ch2a-cha)^2} + \frac{sh4a}{(ch4a-cha)^2} + \frac{sh6a}{(ch6a-cha)^2} + \frac{sh8a}{(ch8a-cha)^2} + \cdot\cdot\right) \text{ ---<G1>}$$

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{ch^2(a/2)} = 4sha\left(\frac{sh2a}{(ch2a+cha)^2} + \frac{sh4a}{(ch4a+cha)^2} + \frac{sh6a}{(ch6a+cha)^2} + \frac{sh8a}{(ch8a+cha)^2} + \cdot\cdot\right) \text{ ---<G2>}$$

$(a \neq 0)$

$$2 = \left(\frac{e^{2a}(cha+cha)}{ch3a+cha}\right) \times \left(\frac{e^{2a}(ch5a+cha)}{ch7a+cha}\right) \times \left(\frac{e^{2a}(ch9a+cha)}{ch11a+cha}\right) \times \left(\frac{e^{2a}(ch13a+cha)}{ch15a+cha}\right) \times \cdot\cdot \text{ ---<H>}$$

$(a > 0)$

$$\frac{1}{sh^2(a/2)} = 4\left(\frac{ch2a \cdot cha-1}{(ch2a-cha)^2} - \frac{ch4a \cdot cha-1}{(ch4a-cha)^2} + \frac{ch6a \cdot cha-1}{(ch6a-cha)^2} - \frac{ch8a \cdot cha-1}{(ch8a-cha)^2} + - \cdot\cdot\right) \text{ ---<I1>}$$

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{ch^2(a/2)} = 4\left(\frac{ch2a \cdot cha+1}{(ch2a+cha)^2} - \frac{ch4a \cdot cha+1}{(ch4a+cha)^2} + \frac{ch6a \cdot cha+1}{(ch6a+cha)^2} - \frac{ch8a \cdot cha+1}{(ch8a+cha)^2} + - \cdot\cdot\right) \text{ ---<I2>}$$

$(a \neq 0)$

$$tha = \left(\frac{ch3a}{cha} \cdot \frac{th2a-tha}{th2a+tha}\right) \times \left(\frac{ch5a}{ch3a} \cdot \frac{th4a-tha}{th4a+tha}\right) \times \left(\frac{ch7a}{ch5a} \cdot \frac{th6a-tha}{th6a+tha}\right) \times \left(\frac{ch9a}{ch7a} \cdot \frac{th8a-tha}{th8a+tha}\right) \times \cdot\cdot \text{ --<J>}$$

$(a > 0)$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2024.4.14 杉岡幹生

＜参考文献＞

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)

・「数学公式Ⅱ」(森口・宇田川・一松、岩波書店)

[訂正] rev1.01　［１］と＜８－１＞、＜８－２＞の予想式三式は間違いであることが判明し、その関連の式と文章を削除しました。数値検証が不十分でした。Sugimoto 氏の指摘により分かりました。氏に深く感謝致します。

2024.4.16