＜ 双曲線ゼータとその派生式 その４６＞ rev1.01

恒等式をさらに見出したので、下方に青色の式で示す。前回までの主要な結果とともに示した。

なお、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。また a は任意の実数であり、よって例えば、$(a \neq 0)$は「a は 0 でない任意の実数」を意味する。log は自然対数、e は自然対数の底である。$\tan^{-1}$, th^{-1} はそれぞれ arctan、arctanh。

==

＜恒等式（or 等式）＞

$$\frac{1}{\mathrm{cha}-1}-\frac{1}{\mathrm{sha}}=2\left(\frac{1}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----<1>}$$

$(a > 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}-\frac{1}{\mathrm{cha}+1}=2\left(\frac{1}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----<2>}$$

$(a > 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2(a/2)}=4\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch2a}}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch4a}}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----<3>}$$

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^2(a/2)}=4\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{ch2a}}{\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{ch4a}}{\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha}}+-\cdot\cdot\right) \quad \text{----<4>}$$

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}=2\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+-\cdot\cdot\right) \quad \text{-----<5>}$$

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}=2\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----<6>}$$

$(a \neq 0)$

$$\frac{\mathrm{ch}\left(\frac{a}{2}\right)}{2\mathrm{sh}\left(\frac{a}{2}\right)}-\frac{1}{2}$$

$$=\left(\frac{\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}a}-1\right)-\left(\frac{\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}a}-1\right)+\left(\frac{\mathrm{sh}6a}{\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}a}-1\right)-\left(\frac{\mathrm{sh}8a}{\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}a}-1\right)+-\cdot\cdot \quad \text{--<7-1>}$$

$(a>0)$

$$\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{a}{2}\right)}{2\mathrm{ch}\left(\frac{a}{2}\right)}$$

$$=\left(1-\frac{\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a}\right)-\left(1-\frac{\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}4a+\mathrm{ch}a}\right)+\left(1-\frac{\mathrm{sh}6a}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a}\right)-\left(1-\frac{\mathrm{sh}8a}{\mathrm{ch}8a+\mathrm{ch}a}\right)+-\cdot\cdot \quad \text{--<7-2>}$$

$(a>0)$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}a}\right)=\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}2a}\right)+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}4a}\right)+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}6a}\right)+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}8a}\right)+\cdot\cdot \quad \text{---<A>}$$

$(a\neq 0)$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}a}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}2a}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}4a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}6a}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}8a}\right)+-\cdot\cdot \quad \text{--<B>}$$

$(a\neq 0)$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}a}\right)=\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a}\right)-\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}4a}\right)+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}6a}\right)-\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}8a}\right)+-\cdot\cdot \quad \text{----<C>}$$

$(a\neq 0)$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}a}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}2a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}4a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}6a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}8a}\right)+\cdot\cdot \quad \text{---<D>}$$

$(a\neq 0)$

$$\mathrm{th}\left(\frac{a}{2}\right)=\left(\frac{\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a}\right)\times\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}a}\right)\times\left(\frac{\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a}\right)\times\left(\frac{\mathrm{ch}8a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}a}\right)\times\cdot\cdot \quad \text{----<E1>}$$

$(a>0)$

$$\mathrm{th}\left(\frac{a}{2}\right)=\left(\frac{\mathrm{sh}2a-\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}2a+\mathrm{sh}a}\right)\times\left(\frac{\mathrm{sh}4a-\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}4a+\mathrm{sh}a}\right)\times\left(\frac{\mathrm{sh}6a-\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}6a+\mathrm{sh}a}\right)\times\left(\frac{\mathrm{sh}8a-\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}8a+\mathrm{sh}a}\right)\times\cdot\cdot \quad \text{----<E2>}$$

(a > 0)

$$\frac{1}{(e^{a}-1)}+\frac{1}{2(e^{2a}-1)}+\frac{1}{3(e^{3a}-1)}+\frac{1}{4(e^{4a}-1)}+\cdot\cdot$$
$$=\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})}\times\frac{1}{(1-e^{-2a})}\times\frac{1}{(1-e^{-3a})}\times\frac{1}{(1-e^{-4a})}\times\cdot\cdot\right) \quad \text{----<F1>}$$

(a > 0)

$$\varpi=\pi\cdot e^{-\pi/6}\cdot\sqrt{2}\cdot\left((1-e^{-2\pi})\times(1-e^{-4\pi})\times(1-e^{-6\pi})\times(1-e^{-8\pi})\times\cdot\cdot\right)^{2} \quad \text{---<F2>}$$

ϖ：レムニスケート周率

$$\frac{1}{sh^{2}(a/2)}=4sha\left(\frac{sh2a}{(ch2a-cha)^{2}}+\frac{sh4a}{(ch4a-cha)^{2}}+\frac{sh6a}{(ch6a-cha)^{2}}+\frac{sh8a}{(ch8a-cha)^{2}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---<G1>}$$

(a ≠ 0)

$$\frac{1}{ch^{2}(a/2)}=4sha\left(\frac{sh2a}{(ch2a+cha)^{2}}+\frac{sh4a}{(ch4a+cha)^{2}}+\frac{sh6a}{(ch6a+cha)^{2}}+\frac{sh8a}{(ch8a+cha)^{2}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---<G2>}$$

(a ≠ 0)

$$2=\left(\frac{e^{2a}(cha+cha)}{ch3a+cha}\right)\times\left(\frac{e^{2a}(ch5a+cha)}{ch7a+cha}\right)\times\left(\frac{e^{2a}(ch9a+cha)}{ch11a+cha}\right)\times\left(\frac{e^{2a}(ch13a+cha)}{ch15a+cha}\right)\times\cdot\cdot \quad \text{---<H>}$$

(a > 0)

$$\frac{1}{sh^{2}(a/2)}=4\left(\frac{ch2a\cdot cha-1}{(ch2a-cha)^{2}}-\frac{ch4a\cdot cha-1}{(ch4a-cha)^{2}}+\frac{ch6a\cdot cha-1}{(ch6a-cha)^{2}}-\frac{ch8a\cdot cha-1}{(ch8a-cha)^{2}}+-\cdot\cdot\right) \quad \text{---<I1>}$$

(a ≠ 0)

$$\frac{1}{ch^{2}(a/2)}=4\left(\frac{ch2a\cdot cha+1}{(ch2a+cha)^{2}}-\frac{ch4a\cdot cha+1}{(ch4a+cha)^{2}}+\frac{ch6a\cdot cha+1}{(ch6a+cha)^{2}}-\frac{ch8a\cdot cha+1}{(ch8a+cha)^{2}}+-\cdot\cdot\right) \quad \text{---<I2>}$$

(a ≠ 0)

$$tha=\left(\frac{ch3a}{cha}\cdot\frac{th2a-tha}{th2a+tha}\right)\times\left(\frac{ch5a}{ch3a}\cdot\frac{th4a-tha}{th4a+tha}\right)\times\left(\frac{ch7a}{ch5a}\cdot\frac{th6a-tha}{th6a+tha}\right)\times\left(\frac{ch9a}{ch7a}\cdot\frac{th8a-tha}{th8a+tha}\right)\times\cdot\cdot \quad \text{--<J>}$$

$(a > 0)$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

　この青色の式が得られた。任意の実数 a(条件付き)で成り立つので、これも恒等式となっている。

　＜Ｊ＞は、まだ提示していない深フーリエ級数の[9]と[10]の二式から（こちらの[8]に続くもの)、複雑な手順を経て導いた。一見右辺は収束するのか？と思うが、収束する。

2024.4.6 杉岡幹生

＜参考文献＞

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)

[訂正]　rev1.01　＜８－１＞、＜８－２＞の予想式は間違いであったので、式とその関連の文章を削除した。2024.4.16