＜ 双曲線ゼータとその派生式 その４５＞ rev1.01

恒等式をさらに四つ見出したので、下方に青色の式で示す。前回までの主要な結果とともに示した。

なお、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。また a は任意の実数であり、よって例えば、$(a \neq 0)$は「a は 0 でない任意の実数」を意味する。log は自然対数、e は自然対数の底である。$\tan^{-1}$, th^{-1} はそれぞれ arctan、arctanh。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜恒等式（or 等式）＞

$$\frac{1}{\text{cha}-1}-\frac{1}{\text{sha}}=2\left(\frac{1}{\text{ch2a}-\text{cha}}+\frac{1}{\text{ch4a}-\text{cha}}+\frac{1}{\text{ch6a}-\text{cha}}+\frac{1}{\text{ch8a}-\text{cha}}+\cdot\cdot\right)$$ ------＜1＞

$(a>0)$

$$\frac{1}{\text{sha}}-\frac{1}{\text{cha}+1}=2\left(\frac{1}{\text{ch2a}+\text{cha}}+\frac{1}{\text{ch4a}+\text{cha}}+\frac{1}{\text{ch6a}+\text{cha}}+\frac{1}{\text{ch8a}+\text{cha}}+\cdot\cdot\right)$$ ------＜2＞

$(a>0)$

$$\frac{1}{\text{sh}^2(a/2)}=4\left(\frac{\text{cha}}{\text{ch2a}-\text{cha}}+\frac{\text{ch2a}}{\text{ch4a}-\text{cha}}+\frac{\text{ch3a}}{\text{ch6a}-\text{cha}}+\frac{\text{ch4a}}{\text{ch8a}-\text{cha}}+\cdot\cdot\right)$$ ------＜3＞

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{\text{ch}^2(a/2)}=4\left(\frac{\text{cha}}{\text{ch2a}+\text{cha}}-\frac{\text{ch2a}}{\text{ch4a}+\text{cha}}+\frac{\text{ch3a}}{\text{ch6a}+\text{cha}}-\frac{\text{ch4a}}{\text{ch8a}+\text{cha}}+-\cdot\cdot\right)$$ ----＜4＞

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{\text{sha}}=2\left(\frac{\text{sha}}{\text{ch2a}-\text{cha}}-\frac{\text{sh2a}}{\text{ch4a}-\text{cha}}+\frac{\text{sh3a}}{\text{ch6a}-\text{cha}}-\frac{\text{sh4a}}{\text{ch8a}-\text{cha}}+-\cdot\cdot\right)$$ ------＜5＞

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{\text{sha}}=2\left(\frac{\text{sha}}{\text{ch2a}+\text{cha}}+\frac{\text{sh2a}}{\text{ch4a}+\text{cha}}+\frac{\text{sh3a}}{\text{ch6a}+\text{cha}}+\frac{\text{sh4a}}{\text{ch8a}+\text{cha}}+\cdot\cdot\right)$$ ------＜6＞

$(a \neq 0)$

$$\frac{\mathrm{ch}\left(\frac{a}{2}\right)}{2\mathrm{sh}\left(\frac{a}{2}\right)}-\frac{1}{2}$$

$$=\left(\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}-1\right)-\left(\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}-1\right)+\left(\frac{\mathrm{sh6a}}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}-1\right)-\left(\frac{\mathrm{sh8a}}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}-1\right)+-\cdot\cdot \quad \text{--<7-1>}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{a}{2}\right)}{2\mathrm{ch}\left(\frac{a}{2}\right)}$$

$$=\left(1-\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}\right)-\left(1-\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha}}\right)+\left(1-\frac{\mathrm{sh6a}}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}\right)-\left(1-\frac{\mathrm{sh8a}}{\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha}}\right)+-\cdot\cdot \quad \text{--<7-2>}$$

$$(a>0)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{cha}}\right)=\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh2a}}\right)+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh4a}}\right)+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh6a}}\right)+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh8a}}\right)+\cdot\cdot \quad \text{---<A>}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sha}}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh2a}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh4a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh6a}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh8a}}\right)+-\cdot\cdot \text{--<B>}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{cha}}\right)=\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}}\right)-\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch4a}}\right)+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch6a}}\right)-\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch8a}}\right)+-\cdot\cdot \quad \text{----<C>}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sha}}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch4a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch6a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch8a}}\right)+\cdot\cdot \text{---<D>}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\mathrm{th}\left(\frac{a}{2}\right)=\left(\frac{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha}}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha}}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}\right)\times\cdot\cdot \quad \text{----<E1>}$$

$$(a>0)$$

$$\mathrm{th}\left(\frac{a}{2}\right)=\left(\frac{\mathrm{sh}2a-\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}2a+\mathrm{sh}a}\right)\times\left(\frac{\mathrm{sh}4a-\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}4a+\mathrm{sh}a}\right)\times\left(\frac{\mathrm{sh}6a-\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}6a+\mathrm{sh}a}\right)\times\left(\frac{\mathrm{sh}8a-\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}8a+\mathrm{sh}a}\right)\times\cdot\cdot \quad \text{----}\langle \mathrm{E2}\rangle$$

$(a>0)$

$$\frac{1}{(e^{a}-1)}+\frac{1}{2(e^{2a}-1)}+\frac{1}{3(e^{3a}-1)}+\frac{1}{4(e^{4a}-1)}+\cdot\cdot$$

$$=\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})}\times\frac{1}{(1-e^{-2a})}\times\frac{1}{(1-e^{-3a})}\times\frac{1}{(1-e^{-4a})}\times\cdot\cdot\right) \quad \text{----}\langle \mathrm{F1}\rangle$$

$(a>0)$

$$\varpi=\pi\cdot e^{-\pi/6}\cdot\sqrt{2}\cdot\left((1-e^{-2\pi})\times(1-e^{-4\pi})\times(1-e^{-6\pi})\times(1-e^{-8\pi})\times\cdot\cdot\right)^{2} \quad \text{---}\langle \mathrm{F2}\rangle$$

ϖ：レムニスケート周率

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^{2}(a/2)}=4\mathrm{sh}a\left(\frac{\mathrm{sh}2a}{(\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}a)^{2}}+\frac{\mathrm{sh}4a}{(\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}a)^{2}}+\frac{\mathrm{sh}6a}{(\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}a)^{2}}+\frac{\mathrm{sh}8a}{(\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}a)^{2}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---}\langle \mathrm{G1}\rangle$$

$(a\neq 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^{2}(a/2)}=4\mathrm{sh}a\left(\frac{\mathrm{sh}2a}{(\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a)^{2}}+\frac{\mathrm{sh}4a}{(\mathrm{ch}4a+\mathrm{ch}a)^{2}}+\frac{\mathrm{sh}6a}{(\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a)^{2}}+\frac{\mathrm{sh}8a}{(\mathrm{ch}8a+\mathrm{ch}a)^{2}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---}\langle \mathrm{G2}\rangle$$

$(a\neq 0)$

$$2=\left(\frac{e^{2a}(\mathrm{ch}a+\mathrm{ch}a)}{\mathrm{ch}3a+\mathrm{ch}a}\right)\times\left(\frac{e^{2a}(\mathrm{ch}5a+\mathrm{ch}a)}{\mathrm{ch}7a+\mathrm{ch}a}\right)\times\left(\frac{e^{2a}(\mathrm{ch}9a+\mathrm{ch}a)}{\mathrm{ch}11a+\mathrm{ch}a}\right)\times\left(\frac{e^{2a}(\mathrm{ch}13+\mathrm{ch}a)}{\mathrm{ch}15a+\mathrm{ch}a}\right)\times\cdot\cdot \quad \text{---}\langle \mathrm{H}\rangle$$

$(a>0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^{2}(a/2)}=4\left(\frac{\mathrm{ch}2a\cdot\mathrm{ch}a-1}{(\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}a)^{2}}-\frac{\mathrm{ch}4a\cdot\mathrm{ch}a-1}{(\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}a)^{2}}+\frac{\mathrm{ch}6a\cdot\mathrm{ch}a-1}{(\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}a)^{2}}-\frac{\mathrm{ch}8a\cdot\mathrm{ch}a-1}{(\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}a)^{2}}+-\cdot\cdot\right) \quad \text{---}\langle \mathrm{I1}\rangle$$

$(a\neq 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^{2}(a/2)}=4\left(\frac{\mathrm{ch}2a\cdot\mathrm{ch}a+1}{(\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a)^{2}}-\frac{\mathrm{ch}4a\cdot\mathrm{ch}a+1}{(\mathrm{ch}4a+\mathrm{ch}a)^{2}}+\frac{\mathrm{ch}6a\cdot\mathrm{ch}a+1}{(\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a)^{2}}-\frac{\mathrm{ch}8a\cdot\mathrm{ch}a+1}{(\mathrm{ch}8a+\mathrm{ch}a)^{2}}+-\cdot\cdot\right) \quad \text{---}\langle \mathrm{I2}\rangle$$

$(a\neq 0)$

==================================

これら青色の四式が得られた。得たのはじつはすこし前であり、他の式を優先して先に出していた。任意の実数ａ(条件付き)で成り立つので、やはりこれらも恒等式となっている。

＜Ｉ１＞と＜Ｉ２＞は、左辺が＜Ｇ１＞と＜Ｇ２＞と同じものになっていて面白いし、そしてゼータの香りが漂っている。

＜7−１＞と＜7−２＞は、単独で見るとやや奇妙な形をしているが、ペアで見ると対称的な感じになっていてきれいである。じつは＜7−１＞と＜7−２＞を辺々足し算すると、＜５＞が出る。

＜7−１＞ ＋ ＜7−２＞＝＜５＞

原子 ＋ 原子＝分子　という感じになっていて、その意味で＜7−１＞、＜7−２＞は大事である。

では、それらを辺々引き算すると、どうなるのだろうか？

最後に、気になることや想うことなど、述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●＜7−１＞と＜7−２＞を見ると、誰でも辺々足し算したくなる。私もしたくなって、そして＜５＞を得た。

では引き算するとどうなるのだろうか？

ゼータの香り漂う世界では、すべてが対称的に万華鏡のような美しいことになっていて、足し算でよい結果になれば、引き算もよい結果になることが多い。

＜7−２＞から＜7−１＞を引き算すると、＜7−１＞に本質的に等しい式が出た。
＜7−２＞を$F_2(a)$式、＜7−１＞を$F_1(a)$式と表現すると、次のようになる。

$F_2(a)$式　$-F_1(a)$式$=F_1(2a)$式

ａは任意なので、$F_1(2a)$式と$F_1(a)$式は同じといえば同じ、違うといえば違うのだが、本質的に等しい（相似形）といえばよいだろうか。

●上の現象は、この領域（三角関数と双曲線関数の融合域、且つ二変数）ではいろいろと起こっていて、じつは上記以外にも私は何度か経験してきた。

同じといえば同じだが、違うといえば違う・・(相似か？)

そのたびにふしぎな感覚にとらわれてきたのだが、そんなことになるのは、この領域が高い対称性をもっているからに違いない。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2024.3.23　杉岡幹生

＜参考文献＞

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)

改訂 rev1.01 ＜7—１＞ ＋ ＜7－１＞⇒＜7−１＞ ＋ ＜7−２＞ほか、書き損じを訂正。