＜ 双曲線ゼータとその派生式 その４４＞ rev1.01

恒等式をさらに見出したので、下方に青色の＜Ｈ＞で示す。前回までの主要な結果と一緒に示した。前回までの分で、式番号の記号や式の並び順を変えたものがあるので注意いただきたい。

なお、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。また a は任意の実数であり、よって例えば、$(a \neq 0)$は「a は 0 でない任意の実数」を意味する。log は自然対数、e は自然対数の底である。$\tan^{-1}$, th^{-1} はそれぞれ arctan、arctanh。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜恒等式（or 等式）＞

$$\frac{1}{\mathrm{cha}-1}-\frac{1}{\mathrm{sha}}=2\left(\frac{1}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----<1>}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}-\frac{1}{\mathrm{cha}+1}=2\left(\frac{1}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----<2>}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2(a/2)}=4\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch2a}}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch4a}}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----<3>}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^2(a/2)}=4\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{ch2a}}{\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{ch4a}}{\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha}}+-\cdot\cdot\right) \quad \text{----<4>}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}=2\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+-\cdot\cdot\right) \quad \text{-----<5>}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}=2\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----<6>}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}a}\right)=\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}2a}\right)+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}4a}\right)+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}6a}\right)+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}8a}\right)+\cdot\cdot \quad \text{---<A>}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}a}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}2a}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}4a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}6a}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}8a}\right)+-\cdot\cdot \quad \text{--<B>}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}a}\right)=\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a}\right)-\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}4a}\right)+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}6a}\right)-\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}8a}\right)+-\cdot\cdot \quad \text{----<C>}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}a}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}2a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}4a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}6a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}8a}\right)+\cdot\cdot \quad \text{---<D>}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\mathrm{th}\left(\frac{a}{2}\right)=\left(\frac{\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a}\right)\times\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}a}\right)\times\left(\frac{\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a}\right)\times\left(\frac{\mathrm{ch}8a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}a}\right)\times\cdot\cdot \quad \text{----<E1>}$$

$$(a>0)$$

$$\mathrm{th}\left(\frac{a}{2}\right)=\left(\frac{\mathrm{sh}2a-\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}2a+\mathrm{sh}a}\right)\times\left(\frac{\mathrm{sh}4a-\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}4a+\mathrm{sh}a}\right)\times\left(\frac{\mathrm{sh}6a-\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}6a+\mathrm{sh}a}\right)\times\left(\frac{\mathrm{sh}8a-\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}8a+\mathrm{sh}a}\right)\times\cdot\cdot \quad \text{----<E2>}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{(e^{a}-1)}+\frac{1}{2(e^{2a}-1)}+\frac{1}{3(e^{3a}-1)}+\frac{1}{4(e^{4a}-1)}+\cdot\cdot$$

$$=\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})}\times\frac{1}{(1-e^{-2a})}\times\frac{1}{(1-e^{-3a})}\times\frac{1}{(1-e^{-4a})}\times\cdot\cdot\right) \quad \text{----<F1>}$$

$$(a>0)$$

$$\varpi=\pi\cdot e^{-\pi/6}\cdot\sqrt{2}\cdot\left((1-e^{-2\pi})\times(1-e^{-4\pi})\times(1-e^{-6\pi})\times(1-e^{-8\pi})\times\cdot\cdot\right)^{2} \quad \text{---<F2>}$$

ϖ：レムニスケート周率

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2(a/2)}=4\mathrm{sha}\left(\frac{\mathrm{sh}2a}{(\mathrm{ch}2a-\mathrm{cha})^2}+\frac{\mathrm{sh}4a}{(\mathrm{ch}4a-\mathrm{cha})^2}+\frac{\mathrm{sh}6a}{(\mathrm{ch}6a-\mathrm{cha})^2}+\frac{\mathrm{sh}8a}{(\mathrm{ch}8a-\mathrm{cha})^2}+\cdot\cdot\right) \quad (a\neq 0)$$ ---<G1>

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^2(a/2)}=4\mathrm{sha}\left(\frac{\mathrm{sh}2a}{(\mathrm{ch}2a+\mathrm{cha})^2}+\frac{\mathrm{sh}4a}{(\mathrm{ch}4a+\mathrm{cha})^2}+\frac{\mathrm{sh}6a}{(\mathrm{ch}6a+\mathrm{cha})^2}+\frac{\mathrm{sh}8a}{(\mathrm{ch}8a+\mathrm{cha})^2}+\cdot\cdot\right) \quad (a\neq 0)$$ ---<G2>

$$2=\left(\frac{e^{2a}(\mathrm{cha}+\mathrm{cha})}{\mathrm{ch}3a+\mathrm{cha}}\right)\times\left(\frac{e^{2a}(\mathrm{ch}5a+\mathrm{cha})}{\mathrm{ch}7a+\mathrm{cha}}\right)\times\left(\frac{e^{2a}(\mathrm{ch}9a+\mathrm{cha})}{\mathrm{ch}11a+\mathrm{cha}}\right)\times\left(\frac{e^{2a}(\mathrm{ch}13+\mathrm{cha})}{\mathrm{ch}15a+\mathrm{cha}}\right)\times\cdot\cdot \quad (a>0)$$ ---<H>

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

今回この＜Ｈ＞が得られた。2 を任意の正実数 a で表す恒等式となっている。e は自然対数の底である。
＜Ｈ＞は、こちらで示した深フーリエ級数［１］から導いた母等式を変形していって、x に ia（i：虚数単位）を代入すれば出る。

なお、今回の式も Excel での数値検証で正しいことを確認している。

最後に、気になることや想うことなど、述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●数学の探求は、いろいろなイメージと重なる。

漁場で魚（公式）を獲っている状況にも重なるし、また料理で新しい料理を考案していることとも似ているし、鉱山で鉱物を発掘している状況にも似ている。さらには、恐竜化石を発掘したり、地下洞窟を探検していることとも重なる。

今回の公式に関して。地下の暗い洞窟を探検していて広い空間に出て、そこは調べつくして先に行ける洞窟がないか探していた。この地下空間はもうここで行き止まりかと思った。先につながるルートがないように感じていたが、小さな穴（式変形）を発見し、その狭いルートを行くとまた広い空間に出た。そこで拾った鉱石が今回の公式である。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2024.3.16　杉岡幹生

＜参考文献＞

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」（Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社）

改訂 rev1.01　＜Ｈ２＞式は自明であったので、取り消した。＜Ｈ１＞は＜Ｈ＞とした。