＜ 双曲線ゼータとその派生式 その４３＞

恒等式を二つ追加したので、下方に青色の＜Ｈ＞、＜Ｉ＞で示す。前回までの主要な結果と一緒に示した。

なお、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。また a は任意の実数であり、よって例えば、$(a\neq 0)$は「a は 0 でない任意の実数」を意味する。log は自然対数である。さらに、$\tan^{-1}$, th^{-1} はそれぞれ arctan、arctanh である。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜恒等式（or 等式）＞

$$\frac{1}{\mathrm{ch}a-1}-\frac{1}{\mathrm{sh}a}=2\left(\frac{1}{\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}a}+\frac{1}{\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}a}+\frac{1}{\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}a}+\frac{1}{\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----<1>}$$

$(a>0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}a}-\frac{1}{\mathrm{ch}a+1}=2\left(\frac{1}{\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a}+\frac{1}{\mathrm{ch}4a+\mathrm{ch}a}+\frac{1}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a}+\frac{1}{\mathrm{ch}8a+\mathrm{ch}a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----<2>}$$

$(a>0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2(a/2)}=4\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}2a}{\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}4a}{\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----<3>}$$

$(a\neq 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}a}=2\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}a}-\frac{\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}a}-\frac{\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}a}+-\cdot\cdot\right) \quad \text{-----<4>}$$

$(a\neq 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}a}=2\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}4a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}8a+\mathrm{ch}a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----<5>}$$

$(a\neq 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^2(a/2)}=4\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a}-\frac{\mathrm{ch}2a}{\mathrm{ch}4a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a}-\frac{\mathrm{ch}4a}{\mathrm{ch}8a+\mathrm{ch}a}+-\cdot\cdot\right) \quad \text{----<6>}$$

$(a\neq 0)$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{cha}}\right)=\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh2a}}\right)+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh4a}}\right)+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh6a}}\right)+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh8a}}\right)+\cdot\cdot \quad \text{---<A>}$$

$(a \neq 0)$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sha}}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh2a}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh4a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh6a}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh8a}}\right)+-\cdot\cdot \quad \text{--<B>}$$

$(a \neq 0)$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{cha}}\right)=\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}}\right)-\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch4a}}\right)+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch6a}}\right)-\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch8a}}\right)+-\cdot\cdot \quad \text{----<C>}$$

$(a \neq 0)$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sha}}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch4a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch6a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch8a}}\right)+\cdot\cdot \quad \text{---<D>}$$

$(a \neq 0)$

$$\mathrm{th}\left(\frac{a}{2}\right)=\left(\frac{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha}}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha}}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}\right)\times\cdot\cdot \quad \text{----<E>}$$

$(a > 0)$

$$\frac{1}{(e^{a}-1)}+\frac{1}{2(e^{2a}-1)}+\frac{1}{3(e^{3a}-1)}+\frac{1}{4(e^{4a}-1)}+\cdot\cdot$$

$$=\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})}\times\frac{1}{(1-e^{-2a})}\times\frac{1}{(1-e^{-3a})}\times\frac{1}{(1-e^{-4a})}\times\cdot\cdot\right) \quad \text{----<F1>}$$

$(a > 0)$

$$\varpi=\pi\cdot e^{-\pi/6}\cdot\sqrt{2}\cdot\left((1-e^{-2\pi})\times(1-e^{-4\pi})\times(1-e^{-6\pi})\times(1-e^{-8\pi})\times\cdot\cdot\right)^{2} \quad \text{---<F2>}$$

ϖ：レムニスケート周率

$$\mathrm{th}\left(\frac{a}{2}\right)=\left(\frac{\mathrm{sh2a}-\mathrm{sha}}{\mathrm{sh2a}+\mathrm{sha}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{sh4a}-\mathrm{sha}}{\mathrm{sh4a}+\mathrm{sha}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{sh6a}-\mathrm{sha}}{\mathrm{sh6a}+\mathrm{sha}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{sh8a}-\mathrm{sha}}{\mathrm{sh8a}+\mathrm{sha}}\right)\times\cdot\cdot \quad \text{----<G>}$$

$(a > 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2(a/2)}=4\mathrm{sha}\left(\frac{\mathrm{sh2a}}{(\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha})^2}+\frac{\mathrm{sh4a}}{(\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha})^2}+\frac{\mathrm{sh6a}}{(\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha})^2}+\frac{\mathrm{sh8a}}{(\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha})^2}+\cdot\ \cdot\right) \quad \text{-----}\langle H\rangle$$

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^2(a/2)}=4\mathrm{sha}\left(\frac{\mathrm{sh2a}}{(\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha})^2}+\frac{\mathrm{sh4a}}{(\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha})^2}+\frac{\mathrm{sh6a}}{(\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha})^2}+\frac{\mathrm{sh8a}}{(\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha})^2}+\cdot\ \cdot\right) \quad \text{-----}\langle I\rangle$$

$(a \neq 0)$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

今回この＜Ｈ＞と＜Ｉ＞が得られた。これらもきれいであり、任意の(0 でない)実数で成り立つので、恒等式である。

＜Ｈ＞は、私が第一基本フーリエ・cos・１番式と名付けた母等式を微分した式の x に ia/2（i：虚数単位）を代入することで出る。

＜Ｉ＞は、第２別種・基本フーリエ・cos・１番式と名付けた母等式を微分した式の x に ia/2（i：虚数単位）を代入することで出る。

なお、今回の式も Excel での数値検証で正しいことを確認している。

最後に、気になることや想うことなど、述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●＜３＞、＜６＞と一緒に今回のものを並べよう。

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2(a/2)}=4\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch2a}}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch4a}}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+\cdot\ \cdot\right) \quad \text{------}\langle 3\rangle$$

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^2(a/2)}=4\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{ch2a}}{\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{ch4a}}{\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha}}+-\cdot\ \cdot\right) \quad \text{-----}\langle 6\rangle$$

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2(a/2)}=4\mathrm{sha}\left(\frac{\mathrm{sh2a}}{(\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha})^2}+\frac{\mathrm{sh4a}}{(\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha})^2}+\frac{\mathrm{sh6a}}{(\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha})^2}+\frac{\mathrm{sh8a}}{(\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha})^2}+\cdot\ \cdot\right) \quad \text{-----}\langle H\rangle$$

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^2(a/2)}=4\mathrm{sha}\left(\frac{\mathrm{sh2a}}{(\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha})^2}+\frac{\mathrm{sh4a}}{(\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha})^2}+\frac{\mathrm{sh6a}}{(\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha})^2}+\frac{\mathrm{sh8a}}{(\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha})^2}+\cdot\ \cdot\right) \quad \text{-----}\langle I\rangle$$

$(a \neq 0)$

ながめると、きれいな秩序があり、どの式もゼータの香り漂っていて深いものを感じる。まるで左辺は右辺の特殊値であるかのようだ。

さらに式を見ていると、なんだか ch〇や sh〇が数のように見えてくる。例えば、”ch4a”などは数の”4”であるかのような気がしてきて、ふしぎな感覚にとらわれる。

●私がやっている領域は、三角関数＆双曲線関数の融合域といっていい領域と思うが、ここは二変数であり、かつ関数が二つある（三角関数と双曲線関数）ので、内容が極めて豊かというか、掘るとなにか出てくる感じがある。

よく思い描くのは、ここは恐竜化石の一大産出地帯というイメージである。あちこちに化石が露出している。あそこに頭の一部が出ている、あそこに尾の一部が見える、こっちは・・という感じで、その下を掘るとやはり出てくる。ここは私しかいないから、スコップを使って手掘りで長い時間をかけて掘っている。強力ドリル（高等数学）で掘れば一挙に掘り出せるのかもしれないが、そんなことする必要はないし、手掘りではスピードが遅いが、遅いと周囲をよく観察できるので別の化石も目に留まるから、「ゆっくり」のメリットは大きいのである。

●よって、ある意味、数学は散歩にも似ている。散歩していると、車では見えなかったものがよく目に留まる。車は飛ばすから見落としが多いが、散歩は遅いから様々な気づきがあって、こんなところにこんな小道があったんだ！ということもままあり、気になってその小道を行けばそれは延々とつづいていて、豊かな森に出ることもよくある。そういう点から、「創造、発見」と「スピード」は関係があると思っている。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2024.3.2　杉岡幹生

＜参考文献＞

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」（Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社）