＜ 双曲線ゼータとその派生式 その４２＞

ある無限積の恒等式を得たので、下方に青色の＜Ｇ＞で示す。前回までの主要な結果と一緒に示した。

なお、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。また a は任意の実数であり、よって例えば、$(a \neq 0)$は「a は 0 でない任意の実数」を意味する。log は自然対数である。さらに、$\tan^{-1}$, th^{-1} はそれぞれ arctan、arctanh である。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜恒等式（or 等式）＞

$$\frac{1}{\mathrm{cha}-1}-\frac{1}{\mathrm{sha}}=2\left(\frac{1}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----<1>}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}-\frac{1}{\mathrm{cha}+1}=2\left(\frac{1}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----<2>}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2(a/2)}=4\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch2a}}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch4a}}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----<3>}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}=2\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+-\cdot\cdot\right) \quad \text{-----<4>}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}=2\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----<5>}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^2(a/2)}=4\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{ch2a}}{\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{ch4a}}{\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha}}+-\cdot\cdot\right) \quad \text{----<6>}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{cha}}\right)=\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh2a}}\right)+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh4a}}\right)+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh6a}}\right)+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{sh8a}}\right)+\cdot\cdot \quad \text{---<A>}$$

$(a \neq 0)$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sha}}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh2a}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh4a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh6a}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh8a}}\right)+-\cdot\cdot \quad \text{--<B>}$$

$(a \neq 0)$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{cha}}\right)=\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}}\right)-\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch4a}}\right)+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch6a}}\right)-\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch8a}}\right)+-\cdot\cdot \quad \text{----<C>}$$

$(a \neq 0)$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sha}}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch4a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch6a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch8a}}\right)+\cdot\cdot \quad \text{---<D>}$$

$(a \neq 0)$

$$\mathrm{th}\left(\frac{a}{2}\right)=\left(\frac{\mathrm{ch2a-cha}}{\mathrm{ch2a+cha}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{ch4a+cha}}{\mathrm{ch4a-cha}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{ch6a-cha}}{\mathrm{ch6a+cha}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{ch8a+cha}}{\mathrm{ch8a-cha}}\right)\times\cdot\cdot \quad \text{----<E>}$$

$(a > 0)$

$$\frac{1}{(e^{a}-1)}+\frac{1}{2(e^{2a}-1)}+\frac{1}{3(e^{3a}-1)}+\frac{1}{4(e^{4a}-1)}+\cdot\cdot$$

$$=\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})}\times\frac{1}{(1-e^{-2a})}\times\frac{1}{(1-e^{-3a})}\times\frac{1}{(1-e^{-4a})}\times\cdot\cdot\right) \quad \text{----<F1>}$$

$(a > 0)$

$$\varpi=\pi\cdot e^{-\pi/6}\cdot\sqrt{2}\cdot\left((1-e^{-2\pi})\times(1-e^{-4\pi})\times(1-e^{-6\pi})\times(1-e^{-8\pi})\times\cdot\cdot\right)^{2} \quad \text{---<F2>}$$

ϖ：レムニスケート周率

$$\mathrm{th}\left(\frac{a}{2}\right)=\left(\frac{\mathrm{sh2a-sha}}{\mathrm{sh2a+sha}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{sh4a-sha}}{\mathrm{sh4a+sha}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{sh6a-sha}}{\mathrm{sh6a+sha}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{sh8a-sha}}{\mathrm{sh8a+sha}}\right)\times\cdot\cdot \quad \text{----<G>}$$

$(a > 0)$

==================================

今回この＜Ｇ＞が得られた。大変きれいである。これも任意の正実数で成り立つので、恒等式である。

＜Ｅ＞とは異なる無限積のものを出したいとずっと思っていたのだが、今回得られてうれしいことである。

＜Ｇ＞は簡単に出る。上方の＜Ａ＞の両辺に、小林先生に教えてもらった次の公式を適用してすこし計算すれば出る。

$$\log\left(\frac{a+b}{a-b}\right)=2\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$(-1<b/a<1)$$

よって＜Ｇ＞と＜Ａ＞は本質的には同値といえるが、似ても似つかぬものになってしまった。

なお、今回の＜Ｇ＞も Excel での数値検証で正しいことを確認している。

最後に、気になることや想うことなど、述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●＜Ｇ＞と＜Ｅ＞を並べよう。並べることで、いっそう美しさが引き立つ。

$$\mathrm{th}\left(\frac{a}{2}\right)=\left(\frac{\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a}\right)\times\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}a}\right)\times\left(\frac{\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a}\right)\times\left(\frac{\mathrm{ch}8a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}a}\right)\times\cdot\cdot\quad\text{----<E>}$$

$$(a>0)$$

$$\mathrm{th}\left(\frac{a}{2}\right)=\left(\frac{\mathrm{sh}2a-\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}2a+\mathrm{sh}a}\right)\times\left(\frac{\mathrm{sh}4a-\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}4a+\mathrm{sh}a}\right)\times\left(\frac{\mathrm{sh}6a-\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}6a+\mathrm{sh}a}\right)\times\left(\frac{\mathrm{sh}8a-\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}8a+\mathrm{sh}a}\right)\times\cdot\cdot\quad\text{----<G>}$$

$$(a>0)$$

息をのむような美しさというのは、こういうのをいうのではなかろうか。自然の奥深さの前に言葉が出ない感じである。

● 上方で並べた一連の恒等式を見ていて感じるのは、そのやわらかさである。

それらはふわふわとしていてなにか柔らかい。恒等式でない＜Ｆ２＞などは硬い。

こういうのは、直接的に数学の内容とは関係ないが、任意の a で成り立つということが、なぜやわらかい感覚をもたらすのか、わからない。私だけの感覚なのか・・

これら恒等式は、ながめているだけで愉しいものがある。

● 数学をやっていて、よく考えるのが、人間の認識ということである。

人間は見えていないものは存在しないと考えてしまう。本当は無数にたくさんどこかに（公式や定理が）存在しているのだけれども、未発見の場合、我々はなにも存在しないと考えてしまう。

公式集や教科書にある公式や定理が「存在するもの」である。

本当はその何千倍、何万倍もの公式や定理がどこかにあるのだけれども、それらは見えないから意識することさえない。

オイラーやガウスは、独自の関心にしたがって独自の判断で地球という数学に対しトンネルを掘ってきた。しかし地球に対してはそのトンネルはまだ小さく、掘られていない領域は手つかずのまま多く残っているのだと思う。

そんなふうに考えるようになってきた。私たちは存在するものを標準としてとらえる傾向にあるようだ。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2024.2.23　杉岡幹生

＜参考文献＞

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)